



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 772 3291, FAX : 772 1775

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

1<sup>η</sup> Φεβρουαρίου 2013

**ZHTHMA PΡΩΤΟ:**

- α) Αν  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  και  $y_3(t)$  είναι τρεις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης  $y''' + p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$   $p(t), q(t), r(t)$  συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα  $I$  και υπάρχει  $t_0 \in I$  για το οποίο η Wronskian των λύσεων είναι  $W(y_1, y_2, y_3)(t_0) = 0$ , είναι οι λύσεις γραμμικώς ανεξάρτητες ή εξαρτημένες; Να αποδειχτεί. (μον. 1)

- β) Αν  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  και  $y_3(t)$  είναι τρεις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης  $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$  και ισχύει

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης.} \quad (\text{μον. 1})$$

- γ) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση  $x^2y'' + 7xy' + 5y = x, x > 0$ . (μον. 1)

**ZHTHMA ΔΕΥΤΕΡΟ:**

- α) Να βρεθούν τα ιδιάζοντα σημεία της διαφορικής εξίσωσης  $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$ . Να προσδιοριστούν για τα κανονικά ιδιάζοντα η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και το διάστημα σύγκλισης της λύσης σε μορφή δυναμοσειράς. (μον. 0.75)

- β) Να λυθεί με χρήση μετασχηματισμού Laplace το πρόβλημα :

$$y'' + y = f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (\text{μον. 1.25})$$

**ZHTHMA ΤΡΙΤΟ:**

- α) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε.  $y dx - (ye^y - 2x) dy = 0$ . (μον. 1)

- β) Να λυθεί το Π.Α.Τ.  $y' = (\tan x)y + \cos x$ ,  $y(2\pi) = \pi/2$ . Ποιό είναι το μέγιστο διάστημα στο οποίο ορίζεται η λύση; (μον. 1)

- γ) Δίνεται το Π.Α.Τ.  $y' = y^{1/3}$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Σε ποιές περιοχές του  $t$  γίνεται επιπέδου ισχύει το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας; Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. (μον. 0.5)

**ZHTHMA ΤΕΤΑΡΤΟ:**

- Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$  όπου  $A = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ -9/5 & 1 \end{pmatrix}$ . Να δοθεί ο θεμελιώδης πίνακας του συτήματος και να προσδιοριστεί το

- είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s),$$

$$\text{αν } F(s) = L(f(t)) \text{ και } u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases}, \quad a \geq 0. \quad L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία