



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ**  
**ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ // ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ**  
**«ΕΙΣΑΓΩΓΗ στις ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ».**  
**ΑΘΗΝΑ 08/07/2013,**

**Θέμα 1° : (α)(Mov. 0.5)** Να προσδιορίσετε τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης

$$(I) u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + (x_1^2 - 1)u_{x_3 x_3} + u_{x_2} + \cos x_2 u = 0, \quad u = u(x_1, x_2, x_3).$$

$$(II) u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + e^{x_1} u_{x_2 x_2} + 5 \sin u_{x_2} + 6 = 0, \quad u = u(x_1, x_2)$$

**(β) (Mov. 0.25)** Να δοθεί η γενική μορφή της σχεδόν γραμμικής ΜΔΕ 1<sup>ης</sup> τάξης με  $\mathbf{x} \in R^3$ . Να δοθεί και μια συγκεκριμένη εξίσωση.

**Θέμα 2°(α) (Mov.1)** Να δοθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1, x_2) = 6, \quad (x_1, x_2) \in (0, 2) \times (0, 1), \quad u(0, x_2) = u(2, x_2) = u(x_1, 0) = u(x_1, 1) = 0.$$

Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

**(β)(Mov. 2.25)** Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad 2 < \rho < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u(2, \varphi) = \sin \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} u(3, \varphi) = A + 1.$$

$$\text{Ο τελεστής Laplace σε πολικές } \Delta u(\rho, \varphi) = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}$$

**(β) (Mov. 1)** Η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad 2 < r < 3, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad f(\theta), g(\theta) \text{ γνωστές συναρτήσεις}$$
$$u(2, \theta, \varphi) = f(\theta), \quad u(3, \theta, \varphi) = g(\theta)$$

δίνεται από τη σχέση

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta). \text{ Να υπολογιστούν οι συντελεστές } a_n, b_n$$

$$\text{Δίνεται η σχέση ορθογωνιότητας } \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}.$$

**Θέμα 3° : (2 μον.)**

**(α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 5, \quad y(0) = y'(5) = 0. \quad (1)$$

**(β)** Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Ποια είναι η συνάρτηση βάρους; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

**(γ)** Στη συνέχεια να λυθεί με δύο τρόπους το ημιομογενές πρόβλημα,

$$y''(x) + 3y(x) = f(x) = x - 2, \quad 0 < x < 5, \quad y(0) = y'(5) = 0, \quad (2)$$

1) με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), 2) με τετραγωνισμούς (ολοκληρώσεις). Σχολιάστε τη λογική εύρεσης τους και συγκρίνετε τις δύο λύσεις του (2) που βρήκατε με τους δύο παραπάνω τρόπους.

Θέμα 4° : (2 μον.)

(α). (μ.1,5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - x + 2, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(5,t) = \frac{25}{2}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \frac{x^3}{6} - x^2 + 10x + 3, \quad 0 < x < 5. \end{array} \right.$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν  $u = u(x,t)$  παριστάνει (αδιάστατη) θερμοκρασία.

(β). (μ. 0,5). Να περιγράψετε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L. \end{array} \right.$$

Θέμα 5° : (1μον.)

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί (τυπικά) το πρόβλημα:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad x > 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

$$u(0,y) = f(y), \quad -\infty < y < \infty,$$

$$u, \quad u_y \rightarrow 0, \quad \text{όταν } |y| \rightarrow \infty \quad \text{και } u \text{ φραγμένη} \quad \text{όταν } x \rightarrow \infty.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier. Δώστε τη λύση υπό ολοκληρωτική μορφή. Δίνονται:

$$1. \quad F\{u(x,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{is y} dy = \hat{u}(x,s),$$

(Η  $\hat{u}(x,s)$  είναι φραγμένη όταν  $x \rightarrow \infty$ , γιατί;)

$$2. \quad F^{-1}\{\hat{u}(x,s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x,s) e^{-is y} ds = u(x,y),$$

$$3. \quad F\{u_{yy}(x,y)\} = (-is)^2 \hat{u}(x,s),$$

$$4. \quad F^{-1}\{\hat{f}(s)\hat{g}(s)\} = (f * g)(y) = (g * f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) g(y - \sigma) d\sigma,$$

$$5. \quad F^{-1}\{e^{-|s|x}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad (\hat{g}(s) = \hat{g}(s;x) = e^{-|s|x}, \quad F^{-1}(\hat{g}(s;x)) = g(y)).$$