ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ, 15/9/2014

ΖΗΤΗΜΑ 1. Εξηγήστε τι εννοούμε όταν λέμε ότι το σύνολο Σ των προτασιακών τύπων στην προτασιακή λογική είναι *πεπερασμένα ικανοποιήσιμο*. Διατυπώστε το θεώρημα της συμπάγειας. Αποδείξτε (χωρίς τη χρήση του θεωρήματος της συμπάγειας) ότι αν το σύνολο των προτασιακών τύπων Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο τότε για κάθε προτασιακό τύπο ϕ είτε το $\Sigma \cup \{\phi\}$ ή το $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Μπορεί να είναι και τα δύο πεπερασμένα ικανοποιήσιμα;

ΖΗΤΗΜΑ 2. Στον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογισμό, ορίστε τις παρακάτω έννοιες: εμφάνιση μεταβλητής σε ένα τύπο, δεσμευμένη και ελεύθερη εμφάνιση, μεταβλητή αντικαταστάσιμη από έναν όρο. Θεωρήστε ένα τύπο της μορφής $\forall x\phi \rightarrow \phi(t/x)$. Αποδείξτε (κατασκευάζοντας ένα αντιπαράδειγμα) ότι ο τύπος αυτός δεν είναι αναγκαστικά έγκυρος εάν η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ. Το ίδιο και για ένα τύπο της μορφής $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$ εάν η x έχει ελεύθερη εμφάνιση στον ϕ.

ΖΗΤΗΜΑ 3. α) Έστω η γλώσσα $\mathcal{L}$ του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού έχει την ισότητα $=$ και ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων P. Για κάθε μία από τις ακόλουθες συνθήκες βρείτε μία πρόταση ϕ της $\mathcal{L}$ ώστε η ερμηνεία $\mathcal{A} =<| \mathcal{A} |, P^{\mathcal{A}}>$ να είναι μοντέλο της ϕ αν και μόνον αν η συνθήκη ικανοποιείται

1. $| \mathcal{A} |$ έχει ακριβώς δύο μέλη.
2. $| \mathcal{A} |$ έχει τουλάχιστον n τον αριθμό μέλη.
3. Η $P^{\mathcal{A}}$ ως σχέση είναι μία συνάρτηση από το $| \mathcal{A} |$ στο $| \mathcal{A} |$.

Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση γιατί η πρόταση που βρήκατε έχει αυτή την ιδιότητα.

β) Πότε έχουμε $\phi \models \psi$; (όπου ϕ και ψ προτάσεις του κατηγορηματικού λογισμού).

Αποδείξτε ότι $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, όπου P και Q σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης.

ΖΗΤΗΜΑ 4. Διατυπώστε το θεώρημα της πληρότητας για τον κατηγορηματικό λογισμό. Αποδείξτε ότι αυτό έπεται από την πρόταση «κάθε συνεπής θεωρία έχει μοντέλο». Αποδείξτε το θεώρημα της συμπάγειας χρησιμοποιώντας ως δεδομένο το θεώρημα της πληρότητας.

Αποδείξτε τώρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συμπάγειας, ότι δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων Σ της γλώσσας με ισότητα $\mathcal{L} = \{=\}$ (της οποίας οι ερμηνείες είναι τα σύνολα) ώστε να ισχύει

$\mathcal{A}$ μοντέλο του $\Sigma \Leftrightarrow \mathcal{A}$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.30 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!