

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

6-10-2015

Θέμα 1. (i) Να βρείτε μια φυσική παραμετρική παράσταση για την καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Να δίξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, σχηματίζει με το διάνυσμα θέσης σταθερή γωνία (ανεξάρτητη από το t).

(iii) Να ορισθούν τα διανύσματα του τριέδρου Frenet μιας φυσικής παραμετρικής καμπύλης του χώρου και να αποδείξετε τον τύπο για το \mathbf{B}' .

(iv) Αν καμπύλη βρίσκεται στην σφαίρα $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = a^2$ κέντρου \mathbf{c} και ακτίνας a και έχει σταθερό μέτρο ταχύτητας να δειχθεί ότι το $\mathbf{r}'''(t)$ είναι εφαπτόμενο της σφαίρας.

Θέμα 2. Έστω η επιφάνεια S του \mathbb{R}^3 που παράγεται από τη περιστροφή περί των άξονα των z του ευθυγράμμου τμήματος του επιπέδου $x0z$ με άκρα τα σημεία $(2, 0, 1)$ και $(1, 0, 2)$. Προσδιορίστε τη κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης c της S που προέρχεται από τη περιστροφή του σημείου $(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$, στο τυχαίο σημείο της καμπύλης.

Θέμα 3. Έστω η επιφάνεια $S : r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, κλάσης 2 και έστω σημείο P της επιφάνειας S . (i) Δώστε τον ορισμό της διεύθυνσης καμπύλης της επιφάνειας στο σημείο P .

(ii) Αν λ_1, λ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$(FN - GM)\lambda^2 + (NE - GL)\lambda + ME - FL = 0,$$

όπου E, F, G, L, M, N τα θεμελειώδη μεγέθη της επιφάνειας στο σημείο P , δείξτε ότι οι διευθύνσεις $(1, \lambda_1), (1, \lambda_2)$ της S στο P είναι κάθετες.

Θέμα 4. Έστω η κυλινδρική επιφάνεια $S : r(\theta, t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, t)$, $(\theta, t) \in (-\pi, \pi) \times (-10, 10)$ και έστω \overline{S} η επιφάνεια του επιπέδου $x0y$ τοψ \mathbb{R}^3 . Αν $f : S \rightarrow \overline{S}$ ώστε $f(\theta, t) = (R\theta, t, 0)$, $(\theta, t) \in (-\pi, \pi) \times (-10, 10)$, (i) Προσδιορίστε και παραστήστε γραφικά την εικόνα $S^* = f(S)$ της επιφάνειας S στην \overline{S} και (ii) εξετάστε αν η f είναι ισομετρική και αν είναι σύμμορφη. Δώστε τους αντίστοιχους ορισμούς.

Θέμα 1: 3,6 ποντίδες

~~Θέμα 2: 2,2 ποντίδες~~

Θέμα 3: 2,1 ποντίδες

Θέμα 2: 2,2 ποντίδες

Θέμα 4: 2,1 ποντίδες

$\dot{T} = \kappa 2vN$, $\dot{N} = -\kappa 2vT$. Καμπύλες του \mathbb{R}^3 φυσική πατρος: Βασικά μοναδιαία διανύσματα: $T(s) = r'(s)$,

$$N(s) = \frac{r''(s)}{\|r''(s)\|}, B(s) = T(s) \times N(s), \text{Τύποι Frenet: } T' = \kappa N,$$

$N' = -\kappa T + \tau B$, $B' = -\tau N$, καμπυλότητα: $\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|r''(s)\|$, στρέψη $\tau(s) = -N \cdot B'$. Καμπύλη

κέντρων καμπυλότητας $e(s) = r(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$. Για τυχαία παράμετρο: $v(t) = \|\dot{r}(t)\|$,

$$T = \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|}, B = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}, N = B \times T, \kappa = \frac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3}, \tau = \frac{(\dot{r} \cdot \ddot{r}) \ddot{r}}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|^2} \text{ Τύποι Frenet: } \dot{T} = \kappa v N,$$

$$\dot{N} = -\kappa v T + \tau v B, \dot{B} = -\tau v N.$$

Έστω η καμπύλη

$$C: r(u, v), (u, v) \in \Omega$$

C : φ(s). s φυσική παράμετρος $t = t(s)$.

$$\kappa(s) = \phi''(s)$$

διάνυσμα καμπυλότητας

$$\phi''(s) = \frac{1}{\|r'(s)\|^2} \left[r'''(s) - \frac{r''(s) \cdot r'(s)}{\|r'(s)\|^2} r'(s) \right].$$

$$q(s) = \phi(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s)$$

κέντρο καμπυλότητας

$$p(s) = \frac{1}{\|\kappa(s)\|}$$

ακτίνα καμπυλότητας

$$\begin{aligned} t'(s) &= \kappa(s) n(s) \\ n'(s) &= -\kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s) n(s) \end{aligned}$$

εξισώσεις Frenet.

$$|\kappa(s)| = \frac{\|r'(s) \times r''(s)\|}{\|r'(s)\|^3}$$

$$t(s) = \frac{[r'(s), r''(s), r'''(s)]}{\|r'(s) \times r''(s)\|^2}$$

Έστω

S: $r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$
είναι στοιχειώδης επιφάνεια του \mathbb{R}^3 .

Ομολιόδημη μεγέθη δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} L(u, v) &= r_{11}(u, v) \cdot N(u, v) \\ M(u, v) &= r_{12}(u, v) \cdot N(u, v) \\ N(u, v) &= r_{22}(u, v) \cdot N(u, v) \end{aligned}$$

$$L = \frac{[r_1, r_2, r_{11}]}{H}$$

$$M = \frac{[r_1, r_2, r_{12}]}{H}$$

$$N = \frac{[r_1, r_2, r_{22}]}{H}$$

σύμβολα Christoffell

$$\Gamma_{ijk}(u, v) = r_i(u, v) \cdot r_{jk}(u, v), (u, v) \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^1(u, v) &= \frac{G(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{2jk}(u, v)}{H^2(u, v)} \\ \Gamma_{jk}^2(u, v) &= \frac{E(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v)}{H^2(u, v)} \end{aligned}$$

$$LN - M^2 \begin{cases} > 0, \text{ επαρτικό} \\ < 0, \text{ μη επαρτικό} \\ = 0 \text{ και } L \neq 0 \text{ ή } N \neq 0, \\ \text{παραβολικό} \\ = 0 \text{ και } L = N = 0, \\ \text{επίπεδο} \end{cases}$$

Γεωδαισιακές Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω η επιφάνεια

S: $r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$
κλάσης 2 και έστω η καμπύλη της επιφάνειας

$\gamma: \phi(s) = r(u(s), v(s))$. s φυσική παράμετρος.

H καμπύλη γίνεται γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) οι $u(s)$, $v(s)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} u''(s) + \Gamma_{11}^1(u'(s))^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(s)v'(s) + \Gamma_{22}^1(v'(s))^2 &= 0 \\ v''(s) + \Gamma_{11}^2(u'(s))^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(s)v'(s) + \Gamma_{22}^2(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}$$

H καμπύλη γίνεται γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s γίνεται γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s φυσική παράμετρος για την ίσχυση

$$\begin{aligned} E u''(s) + F v''(s) + \Gamma_{111}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{112} u'(s)v'(s) + \Gamma_{122}(v'(s))^2 &= 0 \\ F u''(s) + G v''(s) + \Gamma_{211}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{212} u'(s)v'(s) + \Gamma_{222}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}$$

H καμπύλη γίνεται γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s ισχύει

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(u'(s))^2 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1)(u'(s))^2 v'(s) + (\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^1) u'(s)(v'(s))^2 - \\ - \Gamma_{12}^2(v'(s))^2 + u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s) &= 0 \end{aligned}$$

H πρόταση αυτή ισχύει και όταν η s είναι τυχαία παράμετρος