

Θεωρία Γραφημάτων  
13 Ιουλίου 2015

- Διάρκεια: 2 ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1<sup>ο</sup>

Ένα **τουρνουά (tournament)** είναι ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών  $u, v \in V$ , ακριβώς μία από τις ακμές  $(u, v)$ ,  $(v, u)$  ανήκει στο  $E$ .

Δείξτε ότι σε κάθε τουρνουά με  $n$  κορυφές υπάρχει μια κορυφή-βασιλιάς, δηλαδή μια κορυφή  $u$  από την οποία υπάρχει μονοπάτι προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή μήκους το πολύ δύο.

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές, έτσι ώστε για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών  $u, v$  να ισχύει  $d(u) + d(v) \geq n$ . Ναδειχθεί ότι το  $G$  είναι τουλάχιστον 2-συνεκτικό.

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Έστω δένδρο  $T$  με  $n \geq 4$  κορυφές, το οποίο δεν είναι το  $K_{1,n-1}$ . Τότε το  $\bar{T}$  περιέχει Hamilton μονοπάτι.

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω  $G$  ένα απλό συνεκτικό γράφημα με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές. Το  $G$  λέγεται **overfull** αν ισχύει  $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Delta(G)$ , όπου  $\Delta(G)$  είναι ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος.

- Ναδειχθεί ότι αν το  $G$  είναι overfull τότε έχει χρωματικό δείκτη  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .
- Για κάθε ακέραιο  $k$  με  $2 \leq k \leq 5$  βρείτε επίπεδο γράφημα  $G$  με μέγιστο βαθμό  $\Delta(G) = k$  και χρωματικό δείκτη  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

Θέμα 5<sup>ο</sup>

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα  $G$ . Ναδειχθεί ότι περιέχει  $k$ -μερές υπογράφημα  $H$  με τουλάχιστον  $|E(G)|(k-1)/k$  ακμές,  $2 \leq k \leq n$