

Θεωρία Γραφημάτων
11 Σεπτεμβρίου 2015

- Διάρκεια: 2 ½ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1°

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G το οποίο δεν είναι κανονικό (δηλαδή υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με διαφορετικό βαθμό). Αν το G έχει n κορυφές και $m = rn/2$ ακμές, όπου r ακέραιος με $1 \leq r \leq n - 2$, να δειχθεί ότι $\Delta(G) - \delta(G) \geq 2$.

Θέμα 2°

Έστω θετικοί ακέραιοι a, b με $a \leq b \leq 2a$. Δείξτε ότι υπάρχει απλό συνεκτικό γράφημα G με $\text{rad}(G) = a$ και $\text{diam}(G) = b$, όπου $\text{rad}(G)$ είναι η ακτίνα του γραφήματος και $\text{diam}(G)$ η διάμετρος του. Να αιτιολογήσετε επαρκώς την απάντησή σας.

Θέμα 3°

- Κάθε απλό συνεκτικό γράφημα Euler με περιττό πλήθος κορυφών περιέχει τουλάχιστον τρεις κορυφές ίδιου βαθμού.
- Δείξτε ότι για κάθε περιττό ακέραιο αριθμό $n \geq 3$ υπάρχει ακριβώς ένα απλό γράφημα Euler με n κορυφές στο οποίο: υπάρχουν ακριβώς τρεις κορυφές ίδιου βαθμού, και το πολύ δύο κορυφές κάθε άλλου βαθμού.

Θέμα 4°

Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Το G λέγεται **overfull** αν ισχύει $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Delta(G)$, όπου $\Delta(G)$ είναι ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος. Να δειχθεί ότι αν το G είναι overfull τότε έχει χρωματικό δείκτη $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Θέμα 5°

Έστω απλό συνεκτικό 3-κανονικό γράφημα G . Να δειχθεί ότι το G είναι k -συνεκτικό αν και μόνο αν είναι k -πλευρικά συνεκτικό.