

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**Α Λ Γ Ε Β Ρ Α ΙΙ**

**26 Ιουνίου 2015**

*Απαντήστε και στα τρία θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες*

**Θέμα 1.** (α) Βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις πλευρές ενός ισοσκελούς τραπεζίου όταν διατίθενται 3 διαφορετικά χρώματα και επιτρέπεται να χρωματίζονται διαφορετικές πλευρές με το ίδιο χρώμα.

Έστω  $X$  πεπερασμένο σύνολο και έστω  $G$  ομάδα που δρα πάνω στο  $X$ .

(β) Έστω  $r$  το πλήθος των τροχιών του  $X$  υπό την  $G$  και έστω  $x_1, \dots, x_r$  εκπρόσωποι των τροχιών. Δείξτε ότι οι τροχιές διαμερίζουν το  $X$ , και ότι ισχύει ο τύπος:

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=s+1}^r |Gx_i|,$$

όπου  $X_G$  το υποσύνολο των στοιχείων που είναι σταθερά υπό τη δράση της  $G$  και τα  $x_i$ ,  $i = s+1, \dots, r$  είναι εκπρόσωποι των τροχιών που δεν είναι μονοσύνολα.

(γ) Έστω τώρα  $X = G$  με δράση την συζυγία. Από το (β) συνάγετε την εξίσωση κλάσεων της  $G$  και εφαρμόστε την για την ομάδα  $S_3$ .

(δ) Έστω  $p$  ένας πρώτος παράγοντας της τάξης μιας πεπερασμένης ομάδας  $G$ . Δείξτε ότι η  $G$  περιέχει στοιχείο τάξης  $p$ .

**(3,5 μονάδες)**

**Θέμα 2.** (α) Να διατυπωθεί το κριτήριο Eisenstein σχετικά με το αν ένα πολυώνυμο  $f \in \mathbb{Z}[X]$  είναι ανάγωγο.

(β) Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο  $P(X) = X^4 - 4X^2 - 2$  είναι ανάγωγο στον  $\mathbb{Q}[X]$ , και να προσδιοριστεί ο βαθμός του σώματος ριζών του  $P(X)$  πάνω από το  $\mathbb{Q}$ .

(Οι παρακάτω ασκήσεις δεν εξαρτώνται από τις παραπάνω.)

(γ) Να βρεθεί ο βαθμός του σώματος  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \subset \mathbb{C}$  πάνω από το  $\mathbb{Q}$ , και να δειχθεί ότι είναι επέκταση Galois. (Ύπόδειξη: Για το τελευταίο, αρκεί να είναι σώμα ριζών ενός συνόλου πολυωνύμων.)

(δ) Να βρεθεί η ομάδα Galois της επέκτασης  $E/\mathbb{Q}$ , και να περιγραφούν όλα τα ενδιάμεσα σώματα μεταξύ του  $\mathbb{Q}$  και του  $E$ .

**(4 μονάδες)**

**Θέμα 3.** Έστω  $V$  διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το  $\mathbb{C}$ , και  $T$  γραμμικός τελεστής πάνω στον  $V$ . Ένα διάνυσμα  $v$  λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του  $T$  με γενικευμένη ιδιοτιμή  $\lambda$  αν

$$(T - \lambda I)^k v = 0$$

για κάποιο  $k \in \mathbb{Z}_+$ . (Ελέγξτε ότι για  $k = 1$  αυτός είναι ο ορισμός του ιδιοδιανύσματος!)

(α) Να δείξετε ότι ο  $V$  είναι ευθύ άθροισμα υποχώρων που αποτελούνται από ιδιοδιανύσματα.

(β) Να δείξετε ότι ο  $T$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμό του δεν έχει πολλαπλές ρίζες.

(2,5 μονάδες)

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου - Ι. Σακελλαρίδης