

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στην Μαθηματική Ανάλυση I
(Φυλ. 2)
(Παράδοση: μέχρι και την Πέμπτη 10 Νοεμβρίου 2011)

Ασκηση 1. Χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό για το supremum ενός υποσυνόλου του \mathbb{R} καθώς και την Αρχιμήδεια ιδιότητα να αποδείξετε ότι

$$\sup \left\{ \frac{\nu}{2\nu + 1} : \nu \in \mathbb{N} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Ασκηση 2. (a) Εστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Δείξτε ότι $\alpha = \inf A$ αν και μόνο αν

- (i) το α είναι κάτω φράγμα του A και
- (ii) για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < \alpha + \epsilon$.

(β) Να δείξετε ότι $\inf \left\{ \frac{1}{\nu} : \nu \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

Ασκηση 3. Εστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$A + B = \{\alpha + \beta : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(Τπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για το supremum ενός υποσυνόλου του \mathbb{R} .)

Ασκηση 4. Να δείξετε ότι κάθε πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} περιέχει το supremum του.

Ασκηση 5. Εστω A, B μη κενά σύνολα πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x \leq y$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Να δείξετε ότι

- (i) $\sup A \leq y$, για κάθε $y \in B$.
- (ii) $\sup A \leq \inf B$.