

- Άσκηση 1 Για  $x > 1$  ορίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

για να λύσουμε το ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \\ & = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x\sqrt{1+x^2}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \\ & = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+1)\sqrt{x^2+1}} = \\ & \quad \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ & = \frac{(\sqrt{x^2+1}+1)^2\sqrt{x^2+1}}{x} = \\ & \quad \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ & = \frac{\sqrt{x^2+1}+1+x^2-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2\sqrt{x^2+1}} = \\ & \quad \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ & = \frac{(\sqrt{x^2+1}+1) - x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2} = \\ & \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ & = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)'}{x} = \\ & = \left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)\right)' \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} & \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt = \\ & = \int_1^x \left(\ln\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}+1}\right)\right)' dt = \\ & = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) \end{aligned}$$

άρα για να λύσουμε την εξίσωση, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

άρα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$2x - 1 = \sqrt{x^2 + 1} \quad (3)$$

επειδή το  $x$  είναι μεγαλύτερο του 1 δεν υπάρχει κάποιος επιπλέον περιορισμός άρα

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \\ (2x - 1)^2 &= (\sqrt{x^2 + 1})^2 \Rightarrow \\ 4x^2 - 4x + 1 &= x^2 + 1 \Rightarrow \\ 3x^2 - 4x &= 0 \Rightarrow \\ x &= \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad x = 0 \end{aligned}$$

άρα η λύση μας είναι για  $x = \frac{4}{3}$

\*(την λύση  $x = 0$  την απορρίπτουμε μιας είμαστε για  $x > 1$ )

ΑΞΗΣΗ 2.

$$P(\cosh t_p, \sinh t_p) = P(x_p, y_p)$$

Η ευθεία έχει τύπο  $y = ax$  με  $y_p = ax_p \Rightarrow$

$$a = \frac{y_p}{x_p} \quad \text{άρα η ευθεία έχει τύπο } y = \frac{y_p}{x_p} \cdot x$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_0^{x_p} \left( \frac{y_p}{x_p} \right) \cdot x dx - \int_1^{x_p} (\sqrt{x^2 - 1}) dx$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^{x_p} \frac{y_p}{x_p} x dx = \frac{y_p}{x_p} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{x_p} = \frac{y_p \cdot x_p}{2}$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου θα εφαρμόσουμε

τον μετασχηματισμό  $x = \cosh t$

τότε  $dx = \sinh t dt$  και για  $x = 1$   $t = 0$

$x = x_p$   $t = t_p$  τελείο ώστε  $x_p = \cosh t_p$

άρα το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^{x_p} (\sqrt{x^2 - 1}) dx = \int_0^{t_p} \sqrt{\cosh^2 t - 1} \cdot \sinh t dt = \int_0^{t_p} |\sinh t| \cdot \sinh t dt$$

επειδή  $t > 0$  ισχύει  $\sinh t > 0$  άρα

$$\int_0^{t_p} |\sinh t| \cdot \sinh t dt = \int_0^{t_p} \sinh^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{t_p} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt =$$

2

$$\frac{1}{8} \int_0^{t_p} 2e^{2t} - (-2)e^{-2t} - 4t' dt =$$
$$= \frac{1}{8} \int_0^{t_p} (e^{2t} - e^{-2t})' - 4t' dt = -\frac{t_p}{2} + \frac{1}{8} (e^{2t_p} - e^{-2t_p})$$

$$\text{οπως } \frac{1}{4} (e^{2t_p} - e^{-2t_p}) = \left( \frac{e^{t_p} - e^{-t_p}}{2} \right) \left( \frac{e^{t_p} + e^{-t_p}}{2} \right) =$$
$$= \cosh t_p \cdot \sinh t_p = y_p \cdot x_p$$

αρα το δευτερο ολοκληρωμα ειναι ισο με

$$\frac{y_p x_p}{2} - \frac{t_p}{2}$$

αρα το εμβαδον ειναι ισο με:

$$\frac{y_p x_p}{2} - \left( \frac{y_p x_p}{2} - \frac{t_p}{2} \right) = \frac{t_p}{2}$$

- Άσκηση 3 Καταρχάς για  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_0^x \cos t \, dt = \int_0^x (\sin t)' \, dt = \sin x - 0 = \sin x \quad (4)$$

επίσης παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{\frac{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2}{\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}{\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}} = \\ &= \frac{\left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}\right)'}{\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}} = \\ &= \left(\ln \left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}\right)\right)' \end{aligned}$$

άρα

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t} \, dt = \int_0^x \left(\ln \left(\frac{\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}\right)\right)' \, dt = \ln \left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}\right) \quad (5)$$

Επίσης ισχύει ότι  $\cos(x) = \cos(-x)$  άρα για  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύει ότι

$$\int_{-x}^0 \cos x \, dx = - \int_0^{-x} \cos(-x) \, dx = \sin(-x) = \sin x$$

Αντίστοιχα έχουμε ότι για  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_{-x}^0 \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{-x} \frac{1}{\cos(-x)} d(-x) = \ln \left( \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} \right) = -\ln \left( \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right)$$

Από Cauchy-Schwarz έχουμε ότι για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (μιας και το  $\cos x$  είναι πάντα θετικό σε αυτό το διάστημα)

$$\begin{aligned} \left( \int_{-x}^x \cos t^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\cos t} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^2 &\leq \left( \int_{-x}^x ((\cos t)^{\frac{1}{2}})^2 dt \right) \left( \int_{-x}^x \left( \left( \frac{1}{\cos t} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt \right) \Rightarrow \\ 4x^2 &\leq 2 \sin x \cdot 2 \ln \left( \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right) \Rightarrow \\ 2x^2 &\leq \sin x \cdot 2 \ln \left( \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } 2 \ln \left( \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right) = \ln \left( \left( \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)$$

Άρα καταλήξαμε στο ζητούμενο, δηλαδή

$$2x^2 \leq \sin x \cdot \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)$$

ΑΙΚΗΤΗ 4.

3

$$\text{Ισχύει ότι } \forall t > 0 \quad t - \frac{t^3}{3} < \arctan t < t = 1$$

$$-\frac{t^3}{3} < \arctan t - t < 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{t}{3} < \frac{\arctan t - t}{t^2} < 0$$

για  $x > 0$  ισχύει  $x < 3x$  και άρα

$$\int_x^{3x} -\frac{t}{3} dt \leq \int_x^{3x} \frac{\arctan t - t}{t^2} dt < 0$$

άρα επίσης  $\int_x^{3x} -\frac{t}{3} dt = \left[ -\frac{t^2}{6} \right]_x^{3x} = -\frac{9x^2}{6} + \frac{x^2}{6} = -\frac{8x^2}{6}$

και άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} -\frac{t}{3} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{8x^2}{6} = 0$

άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\arctan t - t}{t^2} dt = 0$  αφού το οριζήσιμο

φθάνει

Άρα το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\arctan t - t}{t^2} dt$  υπάρχει συνεισφορά

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\arctan t}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln 3 - \int_x^{3x} \frac{\arctan t - t}{t^2} dt \right) = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

## Άσκηση 5

$f: [0,1] \rightarrow [0,+\infty)$  συνεχή και  $\exists a \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) \leq a \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in [0,1]$$

Επειδή  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq 0 \Rightarrow$

$a \geq 0$ .

Θα αποδείξουμε ότι  $f(x) = 0$ .

Επειδή  $f(x) \leq a \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$$f(x) - a \int_0^x f(t) dt \leq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$e^{-ax} f(x) - a e^{-ax} \int_0^x f(t) dt \leq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\left( e^{-ax} \int_0^x f(t) dt \right)' \leq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

η συνάρτηση  $g(x) = e^{-ax} \int_0^x f(t) dt$  είναι φθισούσα  
αο  $[0,1]$  άρα  $\forall x > 0$  ισχύει ότι

$$g(0) \geq g(x) \Rightarrow$$

$$e^0 \int_0^0 f(t) dt \geq e^{-ax} \int_0^x f(t) dt = 0$$

$$0 \geq e^{-ax} \int_0^x f(t) dt = 0$$

$$0 \geq e^{-ax} \cdot a \int_0^x f(t) dt \geq e^{-ax} f(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1], \text{ άρα}$$

$$\text{ισχύει επίσης } 0 \leq f(0) \leq a \int_0^0 f(t) dt = 0,$$

Άσκηση 6

6

(α')

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2(1+k^2/n^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2/n^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \pi/4 - 0 = \pi/4 \end{aligned}$$

άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$

(β')

Για το ερώτημα αυτό θα υπολογίσω το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{n}{n^2+k^2} \right)^3, \text{ έχουμε ότι}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{n}{n^2+k^2} \right)^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{n^6(1+k^2/n^2)^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 \cdot n \cdot (1+k^2/n^2)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+k^2/n^2)^3} \end{aligned}$$

όμως για  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+k^2/n^2)^3}$  έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{8} \left[ \frac{x(3x^2+5)}{(x^2+1)^2} + 3 \arctan x \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{8}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 - 3 \cdot 0 \right) = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$$

άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+k^2/n^2)^3} \right) = 0$

άρα

από την αμοιότητα (2) και υποθέτουμε  
ποροκύνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

για και  $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$  φράσσειται από  
δύο ακολουθίες με όριο  $\frac{\pi}{4}$ .

· ΑΣΚΗΣΗ 7

$$I = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \right| =$$

$$= \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) dx \right| =$$

$$= \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) dx \right| \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)| dx \quad (1)$$

όπως από Θ.Μ.Τ. ισχύει ότι

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi_k)}{x - \xi_k} \right| = |f'(a_k)| \text{ με } a_k \text{ ανάμεσα ανά το } x \text{ και το } \xi_k \text{ άρα}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi_k)}{x - \xi_k} \right| \leq M \text{ άρα}$$

$$|f(x) - f(\xi_k)| \leq M \cdot |x - \xi_k| \text{ άρα (1) } \Rightarrow$$

$$I \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} M \cdot |x - \xi_k| dx = M \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - \xi_k| dx =$$

$$= M \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} |x - \xi_k| dx + M \int_{\xi_k}^{x_k} |x - \xi_k| dx = M \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_k - x) dx + \int_{\xi_k}^{x_k} (x - \xi_k) dx =$$

$$= \frac{M}{2} \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} 2(\xi_k - x) dx + \frac{M}{2} \int_{\xi_k}^{x_k} 2(x - \xi_k) dx =$$

9

$$\begin{aligned}
 &= \frac{M}{2} \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} [-(\xi_k - x)^2]' dx + \frac{M}{2} \int_{\xi_k}^{x_k} [(x - \xi_k)]' dx = \frac{M}{2} \left[ \right. \\
 &= \frac{M}{2} (\xi_k - x_{k-1})^2 + \frac{M}{2} (x_k - \xi_k)^2 = \\
 &= \frac{M}{2} \left[ (x_k - \xi_k)^2 + (x_{k-1} - \xi_k)^2 \right]
 \end{aligned}$$

από γνωστά ταυτότητα για  $a < \theta < \gamma$  ισχύει

$$(a - \theta)^2 + (\gamma - \theta)^2 \leq (a - \gamma)^2$$

άρα

$$J \leq \frac{M}{2} (x_k - x_{k-1})^2 \quad (2)$$

Επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε την (2)

$$\begin{aligned}
 J &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \right) \right| \leq \\
 &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \right| \text{ από (2)} \leq \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{M}{2} (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{M}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2
 \end{aligned}$$

όμως  $0 < x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{b-a}$  άρα

$$J \leq \frac{M}{2} n \cdot \frac{1}{(b-a)^2}$$

dikons  $n \leq (b-a)^2$  jadi  $\frac{n}{b-a} \leq (b-a)$   $\Delta \sigma \tau$

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_1$$

aka  $J \leq \frac{M}{2}$

Άσκηση 8

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού αναφέρει ότι: αν οι  $f, g, f \cdot g$  είναι ολοκληρώσιμες στο  $[0, 1]$  και:

1)  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0, 1]$

2) η  $g(x)$  είναι αθροισκίω προσέγγιση στο  $[0, 1]$

3) η  $f$  συνεχώς στο  $[0, 1]$  τότε:

$\exists x_0 \in [0, 1]$  τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = f(x_0) \int_0^1 g(x) dx.$$

Θέτουμε  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  και  $g(x) = x^n$

έχουμε ότι  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+x_0} \cdot \int_0^1 x^n dx \quad (1)$

για κάποιο  $x_0 \in [0, 1]$  άρα από την (1) έχω

$$I_n = \frac{1}{1+x_0} \cdot \frac{1}{n+1} \int_0^1 (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1+x_0} \int_0^1 (x^{n+1})' dx =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1+x_0}$$

άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1+x_0} = 0,$

## ΑΙΧΜΕΣ Η 9

(i)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx$$

επειδή  $x > 0$  και  $0 < \sin^2 x < 1$  έπεται ότι  $x^2 \sin^2 x < x^2$

$$0 < \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} > \frac{x}{1+x^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx > \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\text{όπως} \int_0^t \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(x^2+1)'}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\dots \ln(x^2+1) - \ln 1] =$$

$$= \frac{\ln(x^2+1)}{2}$$

$$\text{άρα} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} > \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(t^2+1)}{2} \right) = +\infty$$

άρα το άπειρο άσχετο άσχετο άσχετο άσχετο άσχετο.

g'(ii)

$$\text{Θ ετω } \sqrt{e^x+1} = y \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = dy$$

$$\text{και για } x=0 \quad y=\sqrt{2}$$

$$x \rightarrow +\infty \quad y \rightarrow +\infty$$

$$\text{αρα } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{y^2-1} dy =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{y-1}{y+1} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) = 0 + \ln \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$$

αρα (μενουμες) συγκλιει.