

Ονοματεπώνυμο

Θ E M A T A

Θ1. α) Έστω A αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και έστω λ ιδιοτιμή του A .

- i) Δείξτε ότι $\lambda \neq 0$.
- ii) Δείξτε ότι λ^{-1} ιδιοτιμή του A^{-1} .
- iii) Δείξτε ότι οι πίνακες A και A^{-1} έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

- i) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .
- ii) Βρείτε τους ιδιοχώρους του A .
- iii) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιο ώστε $P^{-1}AP = D$, δύπου D διαγώνιος.

Θ2. α) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton. Στη συνέχεια δώστε τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου του A .

β) Δείξτε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα A διαιρεί κάθε άλλο πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον A .

γ) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A του Θέματος 1β).

δ) Δίνεται ο πίνακας:

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα $B = 3E^{729} - 2E$.

Θ 3. Α Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο \langle , \rangle και $T : V \rightarrow V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $T^* : V \rightarrow V$, η οποία για κάθε $x, y \in V$ ικανοποιεί τη σχέση $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ είναι γραμμική και μοναδική.

Β) α) Έστω ο διανυσματικός χώρος \mathbb{C}^3 (με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο) και ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T(x, y, z) = (ix + (2+3i)y, 3x + (3-i)z, (2-5i)y + iz).$$

Να βρεθεί ο συζυγής μετασχηματισμός T^* του T .

β) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο \langle , \rangle και $T : V \rightarrow V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Αν ο $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αντισυμμετρικός να δειχθεί ότι $\langle x, Tx \rangle = 0$, για κάθε $x \in V$.

Θ 4. Α Έστω M ο υπόχωρος του \mathbb{R}^4 που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (3, 0, 6, 0)$, $v_2 = (0, -1, 2, 1)$ και $v_3 = (2, 9, 11, 0)$. Να βρεθούν:

- i) Το ορθογώνιο συμπλήρωμα M^\perp του M .
 - ii) μια ορθοχανονική βάση για τον καλύνα από τους υποχώρους M , M^\perp .
- B) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $F(x) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$. Να βρεθούν:
- i) Ο μετασχηματισμός $X = QY$, ο οποίος ανάγει την F στην κανονική της μορφή.
 - ii) Το είδος της επιφάνειας που παριστάνει η εξίσωση $F(x) = 1$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ