ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **Οκτώβριος 2007**
ΕΞΑΜΗΝΟ: 4ο

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

Α) Έστω οι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ και $\psi : \Theta \to \mathbb{R}^r$. Τότε, αν η στατιστική συνάρτηση $\underset{\sim}{T} = (T_1, ..., T_m)$ είναι επαρκής για την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^r$, χρησιμοποιώντας το Παραγοντικό Θεώρημα να αποδείξετε ότι η στατιστική συνάρτηση $\underset{\sim}{T}^* = \varphi(\underset{\sim}{T})$ είναι επίσης επαρκής για την παράμετρο $\underset{\sim}{\theta}^* = \psi(\underset{\sim}{\theta})$.

Β) Έστω W αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η W^2 αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ^2.

ΘΕΜΑ 2:

Α) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με σ.π.π. $f(x;\theta) = \dfrac{\theta^2}{1+\theta}(1+x)e^{-\theta x}, x > 0$ και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του $\underset{\sim}{\theta}$.

Β) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα, από κατανομή Γάμμα (1/θ, 4). Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao – Blackwell να δείξετε ότι η ΕΜΠ του θ είναι Α.Ε.Ε.Δ για το θ.

ΘΕΜΑ 3:

Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα, από ομοιόμορφη κατανομή στο (0, θ).

i) Δείξτε ότι η $Y = \max X_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ.
ii) Να βρείτε την σ.π.π. της τ.μ. Y και εν συνεχεία την E(Y).
iii) Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της E(X).
iv) Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της VX).

ΘΕΜΑ 4:

Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π. $f(x\ ;\ \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0,1)$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

i) Αποδείξτε ότι η $T = \sum_1^n \ln X_i$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση του θ.
ii) Αποδείξτε ότι η $Y_i = -2\theta \ln X_i \sim \text{Εκθ}(1/2)$.
iii) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το θ.

* Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ h*

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ