ΣΕΜΦΕ Μαθηματική Ανάλυση ΙΙΙ Κανονική Εξέταση 2006-2007

(Μάιος 2007)

ΟΜΑΔΑ Β

ΘΕΜΑ 1: Δίνεται το διανυσματικό πεδίο: $F=(2z+y,x+2y,2x)$.

Α) Να αποδειχθεί ότι είναι πεδίο κλίσεων και να βρεθεί η πραγματική συνάρτηση f με $F=\nabla f$ και $f(0,1,1)=2$.

Β) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_r F\cdot dr$ στη καμπύλη $r(t)=(\cos t,\sin t,t), t\in[0,2\pi]$.

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $F=(yz,xz-x,xy)$ και το τμήμα της σφαίρας $S: x^2+y^2+z^2=9, z\geq 2$ με θετική όψη την εξωτερική.

Α) Να διατυπωθεί το θεώρημα Stokes και να επαληθευθεί για το διανυσματικό πεδίο F και την S.

Β) Αν $\iint_S(\nabla\times F)\cdot ds=m$, να βρεθεί, χωρίς υπολογισμό αλλά με χρήση του θεωρήματος Gauss, το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{S'}(\nabla\times F)\cdot ds$ στην εξωτερική όψη του τμήματος της σφαίρας $S': x^2+y^2+z^2=9, z\leq 2$.

διατύπωση

ΘΕΜΑ 3: Α) Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου που περιβάλλεται από τα δύο παραβολοειδή $z=16-x^2-y^2$ και $z=-48+3x^2+3y^2$, αφού το σχεδιάσετε.

Β) Να υπολογίσετε με χρήση διπλού ολοκληρώματος το εμβαδόν του χωρίου που περιορίζεται από τις ευθείες: $x+y=3, x+y=5, 2x-y=-1, 2x-y=1$.

ΘΕΜΑ 4: Α) Αν η $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι μια C^1 τάξης συνάρτηση και $r(t)=(x(t),y(t),z(t)), t\in[a,b]$ μια C^1 τάξης καμπύλη με άκρα τα σημεία $A(r(a))$ και $B(r(b))$, να δειχθεί ότι $\int_r \nabla f\cdot dr=f(B)-f(A)$.

Β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι αρμονική ($div(\nabla f)=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$), να δειχθεί ότι για κάθε ομαλή κλειστή επιφάνεια S (σύνορο ενός χωρίου V), ισχύει: $\iint_S(D_n f)ds=0$ (επιφανειακό α΄είδους), όπου $D_n f=\frac{\partial f}{\partial n}$ η παράγωγος της f κατά τη κατεύθυνση του προς τα έξω μοναδιαίου κάθετου διανύσματος n της επιφάνειας S.

Τύποι:

Αν c καμπύλη και S επιφάνεια με παραμετρικές παραστάσεις $r=r(t), t\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ και $r=r(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα και $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση και $F=(P,Q,R)$ διανυσματικό πεδίο C^1 τάξης, τότε:

$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$, $\quad divF=\nabla\cdot F=P_x+Q_y+R_z$, $\nabla\times F=rotF=(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)$, $\frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot n$

Επικαμπύλιο Α΄είδους: $\int_c f ds=\int_a^b f(r(t))\|r'(t)\|dt$

Επικαμπύλιο Β΄είδους: $\int_c F\cdot dr=\int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)dt$

Επιφανειακό Α΄είδους $\iint_S f dS=\iint_D f(r(u,v))\|r_u\times r_v\|dudv$

Επιφανειακό Β΄είδους: $\iint_S F\cdot dS=\iint_D F(r(u,v))\cdot r_u\times r_v dudv$

$\iiint_S div(\nabla f)\,dx\,dy\,dz=$