



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών  
ΕΞΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ  
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟΥ

Ανάλυση I

Μάιος 2007,

Θέμα 1. Α. Δείξτε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

Β. Για  $0 < a < 1$ , δείξτε ότι  $\lim a^n = 0$ .

Γ. Βρείτε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}.$$

Θέμα 2. Α. Αποδείξτε ότι αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ , τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ .

Β. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(i)  $\sum \frac{1}{n!}$     (ii)  $\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$     (iii)  $\sum \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$ .

Γ. Να δείξετε ότι η ακολουθία  $(a_n)_n$  με γενικό όρο

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

δεν είναι ακολουθία Cauchy.

Θέμα 3. Α. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , τότε για κάθε ακολουθία  $(x_n)_n$  με  $x_n \rightarrow x_0$  και  $x_n \neq x_0$ , ισχύει ότι  $\lim_n f(x_n) = \ell$ .

Β. Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση και για κάθε  $x$  στο  $\mathbb{R}$ , ικανοποιεί τη σχέση

$$f(2x) = f(x),$$

δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

Τπόδειξη: Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x/2) = \dots$

Γ. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}, \quad \int x^3 \ln x dx$$

Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες.  
Καλή επιτυχία.