

ΘΕΜΑ 1.

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας οι δυναμικές γραμμές είναι ακτινικές.

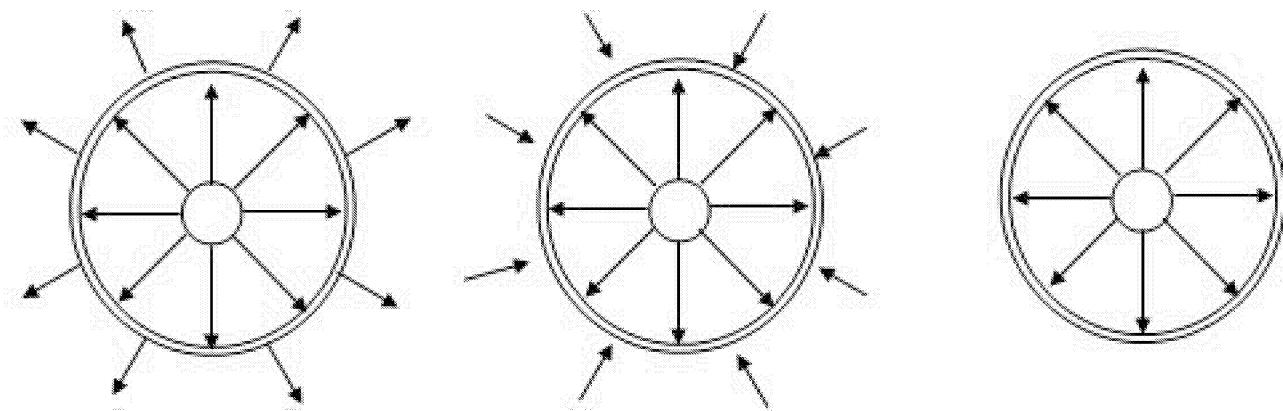
Στο εσωτερικό της αγώγιμης σφαίρας το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό.

Στο χώρο ανάμεσα στη σφαίρα και τον φλοιό, το πεδίο καθορίζεται πλήρως από το φορτίο της σφαίρας (νόμος του Gauss) που είναι θετικό. Άρα, οι δυναμικές γραμμές είναι προς τα έξω, ίδιες και στις τρεις περιπτώσεις.

Στην πρώτη περίπτωση, $|Q_1| > |Q_2|$, στο χώρο εκτός του φλοιού, οι δυναμικές γραμμές είναι προς τα έξω ($Q_1 + Q_2 > 0$), αλλά πιο αραιές.

Στην δεύτερη περίπτωση, $|Q_1| < |Q_2|$, στο χώρο εκτός του φλοιού, οι δυναμικές γραμμές είναι προς τα μέσα ($Q_1 + Q_2 < 0$). Η πυκνότητά τους εξαρτάται από το μέγεθος του $|Q_2|$.

Στην τρίτη περίπτωση, $|Q_1| = |Q_2|$, στο χώρο εκτός του φλοιού το πεδίο είναι μηδέν.



ΘΕΜΑ 2.

α)

$$V(r = R, \theta) = -E_0 R \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{R^3} \right) = 0$$

$$\beta) \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -(\partial V / \partial x, \partial V / \partial z)$$

$$\cos \theta = z/r \text{ και } r = (x^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{Άρα } V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = -E_0 z \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = E_0 z R^3 (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(E_0 z \frac{R^3}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) + E_0 z R^3 (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z}$$

Αλλά

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} = \sin \theta \quad \text{και} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{2z}{(x^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

Άρα

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 3E_0 R^3 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) + 3E_0 R^3 \frac{\cos^2 \theta}{r^3}$$

γ) Για $r = R$ (δηλ. στην επιφάνεια της σφαίρας) τα E_x και E_z γίνονται

$$E_x = 3E_0 \sin \theta \cos \theta \quad \text{και} \quad E_z = 3E_0 \cos^2 \theta$$

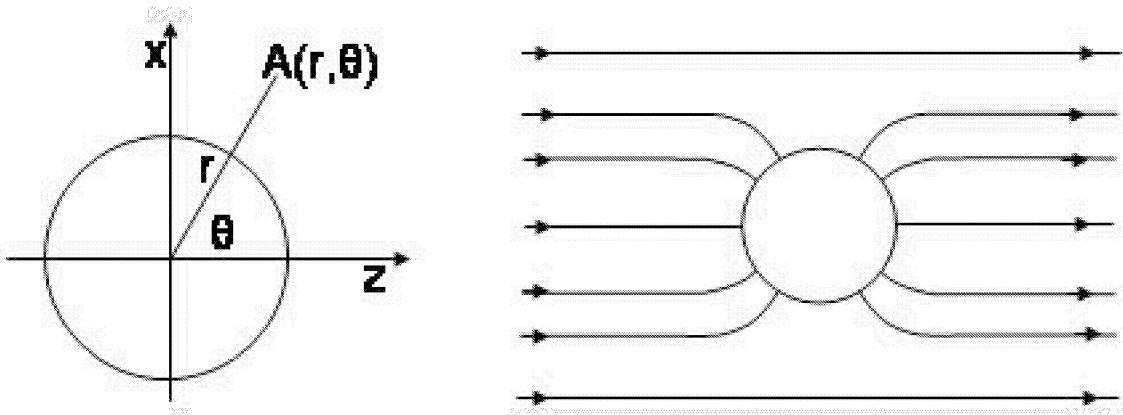
Επομένως, $E_x/E_z = \sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$ που σημαίνει ότι το πεδίο είναι ακτινικό.

δ) Στην επιφάνεια του αγωγού γνωρίζουμε ότι το πεδίο και η επιφανειακή πυκνότητα συνδέονται με τη σχέση $E = \sigma/\epsilon_0$, όπου E το μέτρο του πεδίου. Το τελευταίο, στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$E = (E_x^2 + E_z^2)^{1/2} = 3E_0 \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2} = 3E_0 \cos \theta$$

Επομένως, $\sigma = \epsilon_0 3E_0 \cos \theta$.

ε) Το πεδίο μακριά από τη σφαίρα παραμένει ομογενές, παράλληλο με τον άξονα z , ενώ στην επιφάνεια της σφαίρας θα πρέπει οι δυναμικές γραμμές να είναι κάθετες στη σφαίρα. Σε γωνία $\theta = 90^\circ$ το πεδίο είναι μηδέν.



Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) . Τότε, η βαθμίδα γράφεται

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Επομένως (δεν υπάρχει εξάρτηση από τη γωνία ϕ)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}) = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \\ E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0 \cos \theta - E_0 R^3 \cos \theta \frac{-2}{r^3} = E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} E_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = -E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Πάνω στη σφαίρα ($r = R$), η $E_\theta = 0$, άρα μένει μόνο η $E_r = 3E_0 \cos \theta$, επομένως το πεδίο είναι ακτινικό (έχει συνιστώσα μόνο κατά την ακτινική διεύθυνση \hat{r}) με μέτρο $3E_0 \cos \theta$.

$$E_x = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta, \quad E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$$

και παίρνουμε τις ίδιες σχέσεις που βγάλαμε με τις καρτεσιανές συντεταγμένες.

ΘΕΜΑ 3.

α) Από το νόμου του Faraday σε ολοκληρωτική μορφή έχουμε

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E 2\pi R = -\frac{d(B\pi R^2)}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt}$$

όπου C είναι ο δακτύλιος. Το \vec{E} είναι εφαπτομενικού του δακτυλίου οπότε $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl$ και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σταθερό. Το Φ είναι η μαγνητική ροή από τον δακτύλιο και πR^2 η επιφάνεια του δακτυλίου.

β) Η στοιχειώδης ηλεκτρική δύναμη $d\vec{F}$ στο στοιχειώδες φορτίο dq είναι βέβαια $d\vec{F} = dq\vec{E}$, εφαπτομενική του δακτυλίου. Οπότε ή ροπή ώς προς τον άξονα είναι $dN = RdF$. Επομένως

$$N = \int dN = \int RdF = \int REdq = \int R \frac{R}{2} \frac{dB}{dt} dq = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} \int dq = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} Q$$

χρησιμοποιώντας το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου (χωρίς το πρόσημο “-”)

γ) Από την θεμελιώδη εξίσωση της στροφικής κίνησης $N = Id\omega/dt$ έχουμε

$$\begin{aligned} N &= mR^2 \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{mR^2} = \frac{Q}{2m} \frac{dB}{dt} \Rightarrow \\ \omega &= \int d\omega = \int \frac{Q}{2m} \frac{dB}{dt} dt = \int \frac{Q}{2m} dB = \frac{Q}{2m} \int dB = \frac{Q}{2m} B \end{aligned}$$

αφού η αρχική τιμή του μαγνητικού πεδίου είναι B και η τελική 0 και αρχικά ο δακτύλιος ήταν ακίνητος.

Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι η σωστή, γιατί η κίνηση που προκαλεί στο φορτίο του δακτυλίου αντιστοιχεί σε ρεύμα που δίνει μαγνητικό πεδίο ίδιας φοράς με το B που καταργείται (νόμος του Lenz).

