

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΜΠ**

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ – ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες

Γράψτε και τα 4 θέματα/Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.

K. Αναγνωστόπουλος

N. Τράκας

ΘΕΜΑ 1. α) Λεπτό αγώγιμο σύρμα σχηματίζει δύο ημικύκλια ακτίνας R_1 και R_2 (βλ. Σχ.1α), και διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο (διεύθυνση, φορά και μέτρο) στο σημείο O .

β) Κυλινδρικό αγώγιμο σύρμα ακτίνας a και απείρου μήκους διαρρέεται από ρεύμα με πυκνότητα ρεύματος που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{J} = \frac{2I_0}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \hat{z}$$

όπου ο άξονας των z συμπίπτει με τον άξονα του σύρματος (βλ. Σχ.1β). Βρείτε α) το συνολικό ρεύμα που διαρρέει το σύρμα και β) το μαγνητικό πεδίο στο χώρο.

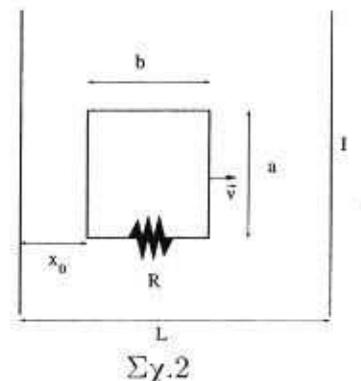
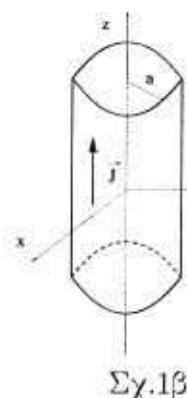
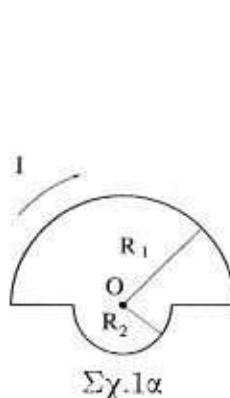
ΘΕΜΑ 2. Σε κάποια περιοχή του χώρου το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση $\vec{E} = -2ax \hat{x} - 2ay \hat{y} + 4az \hat{z}$ όπου a σταθερά. α) Ελέγξτε αν το πεδίο είναι διατηρητικό. β) Βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού $V(x, y, z)$ ως προς το σημείο $(0, 0, 0)$. γ) Βρείτε την χωροκή πυκνότητα του φορτίου και δ) Επαληθεύστε οτι η ροή μέσα από κύβο με κορυφές $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ ικανοποιεί το νόμο του Gauss

ΘΕΜΑ 3. Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = (0, -E_0 \sin(kz + \omega t), 0)$. α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο \vec{B} που αντιστοιχεί στο παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο. β) Βρείτε τη διεύθυνση διάδοσης και την ταχύτητα συναρτήσει των k και ω . γ) Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

όπου c η ταχύτητα διάδοσης του πεδίου.

ΘΕΜΑ 4. Ορθογώνιο αγώγιμο πλαίσιο διαιστάσεων a και b (βλ. Σχ.2) βρίσκεται στο επίπεδο δύο παραλλήλων αγώγιμων συρμάτων που απέχουν από σταθερή L και διαρρέονται από σταθερό ρεύμα I αντίθετης φοράς. α) Αν η αριστερή πλευρά του πλαισίου απέχει από το αριστερό σύρμα απόσταση x_0 , βρείτε τη μαγνητική ροή που διαρρέει το πλαίσιο. α) Αν το πλαίσιο κινηθεί με σταθερή ταχύτητα \vec{v} , απομακρυνόμενο από το αριστερό σύρμα, βρείτε την αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη ως συνάρτηση της απόστασης από το αριστερό σύρμα. γ) Αν το πλαίσιο έχει αντίσταση R , πόση ισχύ πρέπει να παρέχουμε κάθε χρονική στιγμή για να διατηρούμε σταθερή την ταχύτητα του πλαισίου;

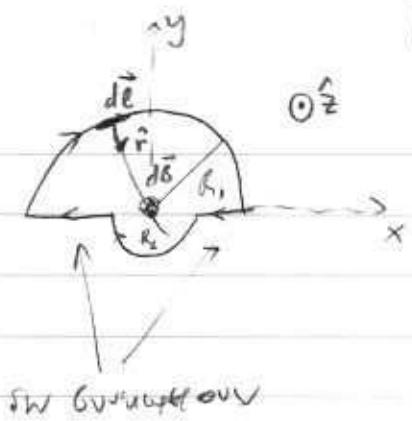


$$\text{Q1) } \text{a) } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} \hat{z}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \pi R^2 \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{z}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{z}$$

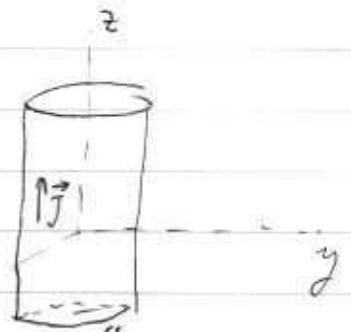
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) \hat{z}$$



$$\text{(b)} \quad \vec{j} = \frac{2I_0}{\pi a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\} \hat{z}$$

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{a} = \frac{2I_0}{\pi a^2} \int \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) 2\pi r dr$$

$$= \frac{2I_0}{\pi a^2} 2\pi \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2} \right] = \frac{4I_0}{\pi a^2} \cdot \frac{a^2}{4} = I_0$$



$$\underline{\text{rsa}} \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{z}$$

$$\underline{\text{rea}} \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{2I_0}{\pi a^2} 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right) = \frac{4I_0}{a^2} \left(\frac{r^2}{4} \right) \left\{ 2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\} \\ &= I_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\underline{\text{ken}} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{r} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right)$$

(2)

$$\text{Q2} \quad \vec{E} = -2ax\hat{x} - 2ay\hat{y} + 4az\hat{z}$$

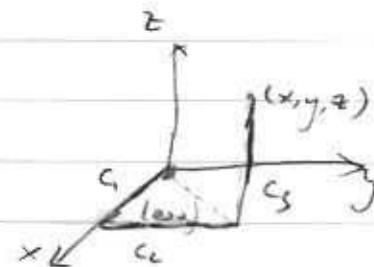
$$(a) (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(4az) - \frac{\partial}{\partial z}(-2ay) = 0 - 0 = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(-2ax) - \frac{\partial}{\partial x}(4az) = 0 - 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2ay) - \frac{\partial}{\partial y}(-2ax) = 0 - 0 = 0$$

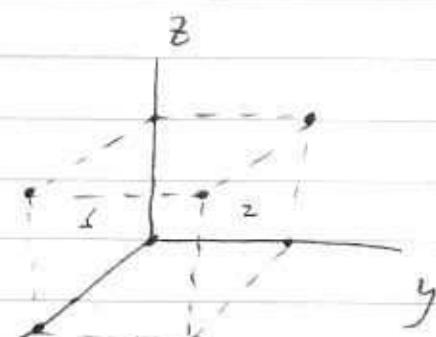
$$(b) V(x, y, z) = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$- \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_0^x \vec{E}_x \cdot dx' = - \int_0^x (-2ax') dx' = ax^2$$



$$\left. \begin{aligned} - \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= - \int_0^y \vec{E}_y \cdot dy' = - \int_0^y (-2ay') dy' = ay^2 \\ - \int_{C_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= - \int_0^z \vec{E}_z \cdot dz' = - \int_0^z (4az') dz' = -2az^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V(x, y, z) = ax^2 + ay^2 - 2az^2$$

$$(d) \vec{\Phi}_{xz}^{(y=0)} = \iint_{xz} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{xz} E_y \hat{y} \, dx \, dz \quad \left(\hat{y} \right) \\ = \int_{xz} 0 \, dx \, dy = 0$$



$$\vec{\Phi}_{xz}^{(y=1)} = \int_{xz} E_y(x, 1, z) \, dx \, dy = (-2a) \cdot 1 = -2a$$

$$\vec{\Phi}_{yz}^{(x=0)} = 0 \quad \vec{\Phi}_{yz}^{(x=1)} = -2a$$

$$\vec{\Phi}_{xy}^{(z=0)} = 0 \quad \vec{\Phi}_{xy}^{(z=1)} = +4a$$

$$\text{Res } \vec{\Phi} = -2a - 2a + 4a = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\Phi} = \underline{0} \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{D. A.JJ. } \nabla \cdot \vec{E} = -2a - 2a + 4a = 0 \Rightarrow Q = \rho dV = 0$$

(3)

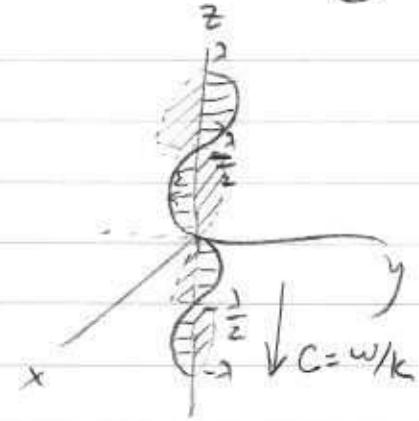
$$\text{θ3} \quad \vec{\epsilon} = -\epsilon_0 \sin(kz + \omega t) \hat{y}$$

$$\epsilon_y = -\epsilon_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - vt)$$

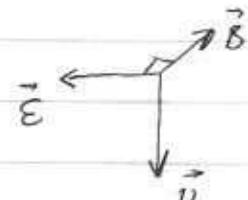
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi}{k}$$

$$\omega = -\frac{2\pi v}{\lambda} \Rightarrow v = -\frac{\omega \lambda}{2\pi} = -\frac{\omega}{k} = -c$$

$$| c = \omega/k |$$



$$\vec{B} = -B_0 \sin(kz + \omega t) \hat{x}, \quad B_0 = \epsilon_0 / c$$



$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = -\epsilon_0 k \cos(kz + \omega t)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -B_0 \omega \cos(kz + \omega t) = -\frac{\epsilon_0}{c} \omega \cos(kz + \omega t) = -\frac{\epsilon_0}{c} \omega \cos(kz + \omega t) \quad (\cancel{\omega/k})$$

$$= -\epsilon_0 k \cos(kz + \omega t) = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = -B_0 k \cos(kz + \omega t)$$

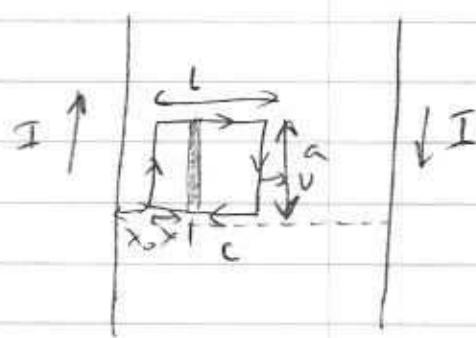
$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} = -\epsilon_0 \omega \cos(kz + \omega t) = -B_0 c \omega \cos(kz + \omega t)$$

$$= -B_0 c \cdot (ck) \cos(kz + \omega t) = -c^2 B_0 k \cos(kz + \omega t) = -c^2 \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial t^2} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial t^2}$$

(4)

Q4



$$(a) \bar{\Phi}_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a} = \int_{x_0}^b \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x+x_0} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{x_0+b}{x_0} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{x_0} \right)$$

$$\bar{\Phi}_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{a} = \int_b^{L-x_0} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{L-(x+x_0)} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left| \frac{L-b-x_0}{L-x_0} \right| = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{b}{L-x_0} \right)$$

$$(b) -\frac{d\bar{\Phi}}{dt} = -\frac{d\bar{\Phi}_1}{dt} - \frac{d\bar{\Phi}_2}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1+\frac{b}{x_0}} \cdot \left(-\frac{b}{x_0^2} \frac{dx_0}{dt} \right) + \frac{1}{1-\frac{b}{L-x_0}} \left(-\frac{b}{(L-x_0)^2} \left(-\frac{dx_0}{dt} \right) \right) \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left\{ \frac{-b}{(b+x_0)x_0} \cdot v + \frac{b}{(L-x_0)(L-x_0-b)} v \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x_0(b+x_0)} - \frac{1}{(L-x_0)(L-x_0-b)} \right\} = E$$

$$g) P = \frac{E^2}{R}$$