

Τομέας Φυσικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.  
Εξέταση στην Ατομική και Μοριακή Φυσική , 24 Ιουνίου 2003  
Καθ. : Κλ. Α. Νικολαίδης

**Απαντήσατε στις ερωτήσεις 1 και 2 , και σε δύο από τις 3-6.  
Διάρκεια 3 ώρες. Χωρίς βοηθήματα.**

- Θεωρείστε το σύστημα δυο σωματιδίων με σπιν  $\frac{1}{2}$ .
  - Βρείτε τις πιθανές τιμές του κβαντικού αριθμού  $S$  του ολικού σπιν.
  - Για κάθε μία από τις παραπάνω τιμές κατασκευάστε τις δυνατές κυματοσυναρτήσεις του σπιν για το σύστημα των σωματιδίων , χρησιμοποιώντας για κάθε σωματίδιο τον συμβολισμό  $X_z(\mu_{1,2})$ .
  - Χαρακτηρίστε ως προς τη συμμετρία τις κυματοσυναρτήσεις του σπιν, τις χωρικές , καθώς και τις ολικές (χωρικές και σπιν) , για το σύστημα και για κάθε μία από τις περιπτώσεις που βρήκατε. **(20 μονάδες)**
- Έστωσαν οι τρεις καταστάσεις του Be :  $1s^2 2s^2$  ,  $1s^2 2s3s$  ,  $1s^2 2p^2$ .
  - Γράψατε την μορφή του τελεστή της ενέργειας για το άτομο του Be.
  - Για ποιά (ποιές) από τις τρεις καταστάσεις το υδρογονικό μοντέλο , όπου δηλαδή ο όρος της διηλεκτρονικής αλληλεπίδρασης απουσίζει , είναι πιο ακριβές; Εξηγείστε.
  - Στα πλαίσια του υδρογονικού μοντέλου βρείτε τις ενεργειακές αποστάσεις των καταστάσεων από το επίπεδο της ενέργειας ιονισμού της Be  $1s^2 2s^2$  σε a.u. ή σε e.V.
  - Ποιά από τις καταστάσεις αυτές είναι ασταθής και για ποιό λόγο;**(30 μονάδες)**
- Στο μόριο του  $H_2^+$  για τις δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές της ενέργειας , γνωρίζουμε τις σχέσεις :
 
$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} (1s_A + 1s_B) \quad , \quad E_1 = \frac{A+B}{1+S}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} (1s_A - 1s_B) \quad , \quad E_2 = \frac{A-B}{1-S}$$
  - Εξηγείστε τα σύμβολα γράφοντας τους αντίστοιχους τύπους αρχίζοντας από τον Hamiltonian του συστήματος.
  - Σχεδιάστε ποιοτικά τις συναρτήσεις  $\Phi_1$  ,  $\Phi_2$  και τις αντίστοιχες ενέργειές τους και εξηγείστε τον ρόλο τους στην δημιουργία του δεσμού του  $H_2^+$ . **(25 μονάδες)**
- Η γενική μορφή της ακτινικής εξίσωσης του Schrodinger για το άτομο του υδρογόνου είναι στο ατομικό σύστημα μονάδων (a.u.) :

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr}) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl}(r) + V(r) R_{nl}(r) = E_{nl} R_{nl}(r)$$

Τα παραπάνω σύμβολα σας είναι γνωστά.

a) Δείξατε ότι η συνάρτηση  $N_1 e^{-r}$  είναι η ιδιοσυνάρτηση της κατάστασης  $|1s\rangle$ .

β) Για την παραπάνω κατάσταση αποδείξτε ότι:  $E = \frac{1}{2} \langle V \rangle = -\langle T \rangle$  όπου  $V$  και  $T$  η δυναμική και κινητική ενέργεια αντίστοιχα.

$$\text{Δίνεται ότι : } \int_0^\infty x^\nu e^{-\mu x} dx = \frac{\nu!}{\mu^{\nu+1}}. \quad (25 \text{ μονάδες})$$

5. Στο άτομο του Υδρογόνου εφαρμόζουμε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα  $z$  με αποτέλεσμα την εμφάνιση του όρου  $\frac{eB}{2m_e c} \hat{l}_z$ ,

στην Hamiltonian , όπου ε ε το φορτίο του ηλεκτρονίου ,  $B$  η ένταση του μαγνητικού πεδίου,  $m_e$  η μάζα του ηλεκτρονίου,  $c$  η ταχύτητα του φωτός και  $\hat{l}_z$  ο τελεστής της προβολής της στροφορμής στον άξονα  $z$ .

- i) Εξηγείστε γιατί η παραπάνω αλληλεπίδραση αίρει τον εκφυλισμό που εμφαίνεται στο άτομο του Υδρογόνου.  
ii) Δώστε τις φασματικές γραμμές σχηματικά , παρουσίας και απουσίας του μαγνητικού πεδίου για μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων με  $l=0$  και  $l=1$  , καθώς και μεταξύ των  $l=2$  και  $l=1$ .  
iii) Δείξτε ότι κάθε φασματική γραμμή θα εμφανιστεί τριπλή , με τις δύο νέες συχνότητες που πλαισιώνουν την κεντρική  $\omega_0$  , να δίνονται από τη σχέση:

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{eB}{2m_e c}. \quad (25 \text{ μονάδες})$$

6. Εστω ένα σύστημα το οποίο την χρονική στιγμή  $t=0$  περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση  $\Psi_0$  και την χρονική στιγμή  $t$  από την  $\Psi(t)$  με  $\Psi(t=0)=\Psi_0$ .  
i) Γράψτε την έκφραση για την πιθανότητα το σύστημα να ευρίσκεται στην αρχική κατάσταση  $\Psi_0$  , μετά από χρόνο  $t_1$ .  
ii) Υπό ποιές προϋποθέσεις η απόσβεση του συστήματος γίνεται εκθετική ;

- iii) Τι εκφράζει το μέγεθος  $\tau = \frac{\int_0^\infty t P(t) dt}{\int_0^\infty P(t) dt}$  και με τι είναι ίσο στην περίπτωση που η  $P(t)$  ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης;  $(25 \text{ μονάδες})$