

Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΙΕΤΣΟΒΙΟ ΠΑΝΑΓΙΩΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΑΝΑΓΙΩΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3019, Fax: 210 772-3021
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Associate Professor
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone: +30 210 772-3019, Fax: +30 210 772-3021
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch
<http://www.physics.ntua.gr/Faculty/theoalex>

Μάθημα: Ανάλυση Σήματος

Προβλήματα 2

(Κεφάλαιο: Μετασχηματισμός Fourier)

(Παράδοση: 8 Απριλίου 2005)

1

Έστω ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $g(t)$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση στη συχνότητα, δηλαδή:

$$g(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} u(\omega - \omega_0)$$

Να βρείτε το σήμα $g(t)$.

2

(α) Να δείξετε ότι ισχύει:

$$[f(t) * g(t)](h(t) * q(t)) \xleftarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} [F(\omega)G(\omega)l + H(\omega)Q(\omega)],$$

όπου:

$$f(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} F(\omega), \quad g(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} G(\omega)$$

$$h(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} H(\omega), \quad q(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} Q(\omega)$$

1

(β) Επίσης να δείξετε ότι ισχύει:

$$(f(t) + g(t)) * (h(t) + q(t)) \xleftarrow{\mathcal{F}} F(\omega)H(\omega) + F(\omega)Q(\omega) + G(\omega)H(\omega) + G(\omega)Q(\omega)$$

3

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$f(t) * g(t) * h(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} F(\omega)G(\omega)H(\omega),$$

όπου

$$f(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} F(\omega), \quad g(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} G(\omega) \quad \text{και} \quad h(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} H(\omega).$$

Επομένως θα ισχύει:

$$f^{*n}(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} F^n(\omega)$$

όπου $f^{*n}(t)$ είναι η $f(t)$ συνέλιξη με τον εαυτό της $n-1$ φορές, όπου $n = 2, 3, 4, \dots$

4

Από τον συμβολισμό $f^{*n}(t)$ της συνέλιξης κατά n φορές, μπορούμε να επεκτείνουμε την ιδέα της συνέλιξης αλασματικής τάξης. Να δείξετε ότι μια έκφραση του $f(t)$ συνέλιξη με τον εαυτό του κατά μισή φορά θα είναι:

$$f^{*1\frac{1}{2}}(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau \right]^{3/2} d\omega$$

2

5

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\tau) \bar{g}(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{F}(-\omega) G(-\omega),$$

όπου

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \quad \text{και} \quad g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega),$$

και επομένως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\tau) \bar{g}(t-\tau) e^{-j\omega t} dt d\tau = \bar{F}(-\omega) \bar{G}(-\omega)$$

6

Με τη βοήθεια της ιδιότητας του γινομένου του μετασχηματισμού Fourier, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin c'(t) \cos(\pi t) dt = \frac{1}{2}.$$

7

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\left(\frac{1}{\pi t} \right) * \left(\frac{-1}{\pi t} \right) = \delta(t),$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι η αυτοσυγχέτιση του σήματος $1/\pi t$ είναι μια χρονιστική συνάρτηση, αν και τενικώς η αυτοσυγχέτιση ενός σήματος (δηλαδή η συνέλιξη ενός σήματος με τον εαυτό του) είναι μια νέα συνάρτηση που "απλώνεται" πιο πολύ από την αρχική συνάρτηση.

8

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi a t) dt = e^{-\pi a^2}$$

9

Να δείξετε τον ακόλουθο μετασχηματισμό Fourier:

$$e^{j\pi t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\nu} e^{-j\pi f^2},$$

και επομένως θα ισχύουν:

$$\cos(\pi t^2) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\pi f^2) + \sin(\pi f^2)],$$

$$\sin(\pi t^2) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\pi f^2) - \sin(\pi f^2)]$$

10

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$2\pi t\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{df} \sin c(f),$$

όπου $\Pi(t)$ είναι ο τετραγωνικός παλμός πλάτους 1.

11

Να δείξετε την ακόλουθη ανισότητα:

$$|f(t) * g(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) G(\omega)| d\omega,$$

όπου:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \quad \text{και} \quad g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega)$$

12

Με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier, να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης:

$$F(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}.$$

Θεωρείστε ως γνωστό το μετασχηματισμό Fourier,

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}.$$

13

Να επαληθεύσετε την ιδιότητα της

(α) ολοκλήρωσης του μετασχηματισμού Fourier:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega), \quad (1)$$

γνωρίζοντας ότι:

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (2)$$

(β) Με τη βοήθεια της σχέσης (1) να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$. Επίσης θεωρείστε ως γνωστό το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής συνάρτησης $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$.

14

Θεωρείστε ένα πραγματικό σήμα $f(t)$ με μετασχηματισμό Fourier τη συνάρτηση $F(\omega)$:

$$F(\omega) - \mathcal{F}[f(t)] = R(\omega) + jX(\omega),$$

και:

$$f(t) = f_r(t) + f_c(t),$$

όπου $f_r(t)$ και $f_c(t)$ είναι το άρτιο και περιττό μέρος του σήματος $f(t)$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ισχύουν:

$$f_r(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R(\omega),$$

$$f_c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} jX(\omega)$$

15

Να δείξετε ότι η σχέση:

$$\bar{F}(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Gamma(-\omega) \text{ αν } f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Gamma(\omega).$$

είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σήμα $f(t)$ να είναι πραγματικό.

16

Να βρείτε τη κρουστική απόκριση του ΙΧΑ δυναμικού συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξισώση:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt},$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ είναι τα σήματα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα.

17

Έστω το ΙΧΑ δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου εξόδου:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \quad (3)$$

Να βρείτε το σήμα εξόδου αν το σήμα εισόδου είναι $x(t) = u(t)$.

18

Θεωρείστε ένα αιτιατό ΙΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega).$$

Να δείξετε ότι η κρουστική απόκριση του $h(t)$ μπορεί να προσδιορισθεί από το $R(\omega)$ & το $X(\cdot)$ και μόνο.

19

Θεωρείστε ένα συνεχές ΙΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $S(\omega)$ της βηματικής απόκρισης $s(t)$ του συστήματος.

20

Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης:

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \left(\omega^2 - j3\omega \right) \quad (4)$$

21

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{2}{j\omega} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \rightarrow \text{sgn}(t),$$

με τη βυθίσια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, δηλαδή κάνοντας την ολοκλήρωση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

22

Έστω ένα αιτιατό σήμα $f(t)$ ($f(t) = 0 \forall t < 0$), με μετασχηματισμό Fourier:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Να δείξετε ότι:

$$R(\omega) = \mathcal{H}X(\omega) \quad \text{και} \quad X(\omega) = -\mathcal{H}R(\omega),$$

όπου \mathcal{H} είναι ο τελεστής του μετασχηματισμού Hilbert που ορίζεται ως:

$$\mathcal{H}g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} g(t) * \frac{1}{t}.$$

23

Έστω $F(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $f(t)$:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega).$$

Ορίζομε ένα νέο σήμα $f_\beta(t)$:

$$f_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{+\beta} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Να δείξετε ότι:

$$f_\beta(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(l - \omega) \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{2 \sin \beta t}{\pi} * f(t)$$
