

ΣΕΜΦΕ 8^ο Εξάμηνο

Κανονική Εξέταση

Αιαδ. Έτος: 2006-07

Μάθημα "Θεωρητική Φυσική - Σχετικότητα Κβαντομηχανική"

Διδάσκων: Γ. Ζουπόνος

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Επιλογή 4 από 5 θέματα

16/10/2007

Θέμα 1 Θεωρείστε ένα σύστημα που περιγράφεται από την χρονικά ανεξάρτητη Χαμιλτονική \hat{H}_0 , η οποία έχει ιδιοσυναρτήσεις Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 με αντίστοιχες ιδιοτύπες E_1, E_2, E_3 . Το σύστημα αυτό τοποθετείται σε ένα περβάλλον το οποίο δημιουργεί χρονικά εξαρτημένες αλληλεπιδράσεις. Το τελικό σύστημα που προκύπτει είναι δυνατόν να παραγραφεί από μία συνολική Χαμιλτονική $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$, όπου $\hat{H}_1(t)$ εξαρτάται αναλυτικά από τον χρόνο αλλά επιπλέον μπορεί να θεωρηθεί «διαταραχή» σύμφωνα με τη θεωρία δισταραχών.

Αν ένα σωματίδιο βρίσκεται για $t=0$ στην κατάσταση Ψ_1 , να βρείτε την

$$\Psi(t) = C_1(t)\Psi_1 + C_2(t)\Psi_2 + C_3(t)\Psi_3,$$

(θεωρώντας όλα τα παραπάνω στοιχεία γνωστά) σύμφωνα με την χρονικά εξαρτημένη θεωρία δισταραχών.

Θέμα 2 Θεωρείστε την Αγρεσινή πυκνότητα που περιγράφει δύο ελεύθερα πραγματικά πέδια ϕ_1, ϕ_2 με κοινή μάζα m ,

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{m^2}{2} \phi_2^2$$

α) Να δείξετε ότι ηL είναι αναλογική κάτια από τον μετασχηματισμό $SO(2)$

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1' = \phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha$$

$$\phi_2 \rightarrow \phi_2' = \phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha$$

και να βρείτε το διστηρούμενο ρεύμα Noether.

β) Να δείξετε ότι εισάγοντας ένα μηχανικό πέδιο

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2),$$

$$\Phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2),$$

η L παίρνει τη μορφή

$$L = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi,$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τον $U(1)$ μετασχηματισμό

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-i\phi} \Phi(x)$$

και να προσδιορίστε το αντίστοιχο ρεύμα Noether.

γ) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange, να δείξτε ότι η L στη μορφή του ερωτήματος (β) οδηγεί στην εξισώση Klein-Gordon.

Θέμα 3°

α) Θεωρείστε την Λαγρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει ένα σπινοριακό πεδίο

$$L = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange να δείξτε ότι η L οδηγεί στην εξισώση Dirac.

β) Να δείξτε ότι η L είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό $\psi(x) \rightarrow e^{-i\phi} \psi(x)$ και να βρείτε το αντίστοιχο διατηρούμενο ρεύμα Noether.

γ) Να δείξτε ότι η L δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό $\psi(x) \rightarrow e^{-i\omega(x)} \psi(x)$

και ότι αυτό επιτυγχάνεται αν γίνει η αντικατάσταση του ∂_μ με το $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ όπου το διανυσματικό πεδίο A_μ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu a(x), \text{ με } a \text{ σταθερά και } a(x) \text{ τυχαία συνάρτηση.}$$

δ) Να δείξτε ότι η προσθήκη στην L , που δημιουργήθηκε στο (γ), ενός κινητικού όρου για τα πεδία A_μ , $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, όπου $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, επιτρέπεται ενώ αντίστοιχα ένας όρος μάζας δεν επιτρέπεται.

Θέμα 4°

Θεωρείστε τη Λαγρανζιανή πυκνότητα

$$L = (D_\mu \Phi^*)(D^\mu \Phi) + \mu^2 (\Phi^* \Phi) - \lambda (\Phi^* \Phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

όπου

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - ig A_\mu) \Phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2),$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς $U(1)$.

- α) Να δείξετε ότι για $\mu^2 > 0$ υπάρχει αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας στο κενό η οποία οδηγεί για $g=0$ σε ένα Goldstone μποζόνιο χωρίς μάζα.
 β) Να δείξετε ότι για $g \neq 0$ το διανυσματικό πεδίο A_μ αποκτά μάζα και να την προσδιορίσετε.

Θέμα 5^a

Θεωρείστε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$L = (\partial_\mu \Phi^\dagger) (\partial^\mu \Phi) + \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

όπου Φ είναι μία μεγαλική βαθμωτή ισοσπίν δυάδα, $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_\beta \end{pmatrix}$, δηλαδή η Φ ανήρει στη θεμελιώδη αναπαράσταση του $SU(2)$.

- α) Να δείξετε ότι η L είναι αναλλοίωτη κάτω από τον άλικο απειροστό μετασχηματισμό $\Phi \rightarrow \Phi' = \left(1 - i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2} \right) \Phi$,

όπου $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ είναι οι συνήθεις πλίνιας Pauli που εκανοποιούν τη σχέση $\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2} \quad i, j, k = 1, 2, 3$

και $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ είναι $SU(2)$ παράμετροι μετασχηματισμών οι οποίες επικλέον θεωρούνται απειροστές, $\theta_j \ll 1$ και είναι ανεξάρτητες του x .

- β) Τι αλλαγές πρέπει να γίνουν στην παραπάνω Λαγκρανζιανή πυκνότητα ώστε να είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς $SU(2)$;