

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ, 2007

ZHTHMA 1. Ορίστε για σύνολα  $A$  και  $B$  τις έννοιες  $A \sim B$  ( $A$  και  $B$  ισοπληθικά),  $A \preccurlyeq B$  (το πλήθος των στοιχείων του  $B$  είναι τουλάχιστον όσο του  $A$ ) και  $A \prec B$  (το  $B$  έχει γνησίως περισσότερα στοιχεία από το  $A$ ). Ποιές είναι οι αντίστοιχες σχέσεις για τους πληθικούς αριθμούς  $\bar{A}$  και  $\bar{B}$ ;

Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο  $A$ , έχουμε  $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{P(A)}}$ , όπου  $\bar{P(A)}$  το δυναμοσύνολο του  $A$ .

ZHTHMA 2. Διατυπώστε το θεώρημα Schröder-Bernstein. Αποδείξτε το θεώρημα Schröder-Bernstein χρησιμοποιώντας (χωρίς απόδειξη) το λήμμα του Tarski.

ZHTHMA 3. Ορίστε τις έννοιες της ολικής διάταξης και της καλής διάταξης. Δείξτε ότι αν  $\eta \leqslant$  είναι ολική διάταξη στο σύνολο  $A$ , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1.  $(A, \leqslant)$  είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

2. για κάθε σύνολο  $B$ ,

$$\forall a \in A [\forall x \in A (x < a \rightarrow x \in B) \rightarrow a \in B] \rightarrow A \subseteq B,$$

δηλαδή ισχύει ότι  $A \subseteq B$  με την υπόθεση ότι κάθε φορά που όλα τα μικρότερα ενός στοιχείου  $a \in A$  χνήκουν στο  $B$ , το στοιχείο  $a$  ανήκει επίσης στο  $B$ .

ZHTHMA 4. 'Εστω  $(A, \leqslant)$  μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίστε τις έννοιες αλυσίδα, άνω φράγμα, μεγιστικό στοιχείο. Διατυπώστε το λήμμα του Zorn. Χρησιμοποιέστε το λήμμα του Zorn για να αποδείξτε ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση (Hamel!).

ZHTHMA 5. Διατυπώστε το αξίωμα της επιλογής. Χρησιμοποιήστε το αξίωμα της επιλογής (ή κάποιο ισοδύναμό του) για να αποδείξτε ότι η ένωση μιας απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητό σύνολο.

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.45 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!