

Μαθηματική Χρηματοοικονομική Θεωρία
ΣΕΜΦΕ, 3-2-2006.

Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, S\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_T\}$.

Θέμα 1. Γράψτε τις εξισώσεις προϋπολογισμού και εξηγήστε τη φυσική σημασία τους. Εξηγήστε πώς προκύπτει ο υπόχωρος απολαβών από αυτές τις εξισώσεις και πως συνδέεται ο υπόχωρος απολαβών με την απουσία κερδοσκοπίας. Δώστε τον ορισμό του συνόλου προϋπολογισμού και δείξτε ότι αν δεν υπάρχει κερδοσκοπία υπάρει αυστηρά θετικό διάνυσμα, ορθογώνιο στον υπόχωρος απολαβών.

Θέμα 2. Αν $\Delta_t = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, και F_t η άλγεβρα που παράγεται από τη Δ_t , ποιό είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς την F_t . Αποδείξτε την απάντησή σας. (Να αρχίσετε με τον ορισμό της F_t - μετρήσιμης συνάρτησης.) Γιατί τα διάφορα μεγέθη της οικονομίας υποτίθενται F_t - μετρήσιμα;

Θέμα 3. Αν z είναι η επεπεδυτική στρατηγική (χαρτοφυλάκιο) να γραφεί ο τύπος της απόδοσης Y^z της επένδυσης z και ο τύπος της απόδοσης X της μοναδιαίας επένδυσης. Αν $E(Y^z) = 0$, δείξτε ότι X είναι martingale.

Άσκηση 4. Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, 3\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\Delta_0 = \{S\}, \Delta_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, \Delta_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}, \Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$, διάνυσμα πιθανοτήτας $p = (\frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12})$.

Σύμφωνα με την αρχή των αποτελεσματικών αγορών, να τιμολογηθούν τα χρηματοοικονομικά συμβόλαια $V^1 = (0, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 0), V^2 = (0, 3, 1, 2, 0, 10, 1, 0, 2, 3, 1, 1, 4)$.

Άσκηση 5. Έστω μετοχή εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο σε διάστημα τεσσάρων χρονικών περιόδων $0, 1, 2, 3$ με αρχική τιμή $S_0 = 20$ Ευρώ, συντελεστή ανόδου $a = 1.1$, συντελεστή καθόδου $b = 0.8$ και συντελεστή προέξοφλησης $r = 0.02$. Να γραφεί το διάνυσμα απόδοσης κατά μήκος του δένδρου πληροφόρησης δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης $k = 15$ Ευρώ και ημερομηνία λήξης $T = 3$. Να τιμολογηθεί το δικαιωμα. Επίσης να γραφεί το διάνυσμα απόδοσης κατά μήκος του δένδρου πληροφόρησης δικαιώματος Αμερικανικού τύπου με τιμή εξάσκησης $k = 15$ Ευρώ.

Άσκηση 6. Στην οικονομία της προηγούμενης άσκησης προσδιορίστε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του Ευρωπαϊκού δικαιώματος.

Καλή Επιτυχία.

$$P = \frac{1 + r - b}{a - b}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r} E(C) = \frac{1}{1+r} (11,62 \cdot P^3 + 4,36 \cdot P^2 \cdot (1-P) + \dots)$$

O, 733

O, 266