ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ
22/07/2006

Θέμα 1. (i) Δώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου $m^*(E)$ ενός υποσυνόλου E του $\mathbb{R}$ και δείξτε ότι $m^*(E_1 \cup E_2) \leq m^*(E_1) + m^*(E_2)$.
(ii) Δώστε τον ορισμό του μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ και δείξτε ότι αν E_1, E_2 μετρήσιμα τότε και η ένωσή τους $E_1 \cup E_2$ είναι μετρήσιμη.
(iii) Έστω $E \subseteq [a,b]$ μετρήσιμο με $m(E) > 0$.
(α) Ορίζουμε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = m([a,x] \cap E)$, $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι Lipschitz.
(β) Δείξτε ότι για κάθε $c \in (0, m(E))$ υπάρχει $A \subseteq E$ με $m(A) = c$.

Θέμα 2. (i) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη μετρήσιμο. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f = \chi_E - \chi_{E^c}$ είναι μη μετρήσιμη. Είναι η $|f|$ μετρήσιμη ;
(ii) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $max\{f,g\}$, $min\{f,g\}$ και $f+g$ είναι μετρήσιμες.
(iii) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Θέτουμε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x)$, αν $x \in E$ και $h(x) = g(x)$, αν $x \notin E$. Δείξτε ότι η h είναι μετρήσιμη.

Θέμα 3. (i) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και δείξτε ότι αν $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, $n = 1, 2, ...$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε

$$\int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dm$$

(ii) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των μετρησίμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ με $\nu(E) = \int_E f dm$, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο.
(α) Δείξτε ότι το ν είναι ένα θετικό μέτρο στην $\mathcal{M}$.
(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $m(E) < \delta$ ισχύει ότι $\nu(E) < \epsilon$.

Θέμα 4. (i) (α) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n = 1, 2, ...$ θέτουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n f(x)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f_n είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το $lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n dm$.
(ii) Έστω $n \geq 2$ και έστω $E_1, E_2, ..., E_{2n}$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με $m(E_i) \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $i = 1, ..., 2n$. Δείξτε ότι τουλάχιστον n απο αυτά έχουν μη κενή τομή.