

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ

24/05/2007

Θέμα 1.

(i) (α) Δώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue m^* στο \mathbb{R} καθώς και του Lebesgue μετρησίμου υποσυνόλου του \mathbb{R} . (β) Δείξτε ότι αν $m^*(A) = 0$ τότε το A είναι Lebesgue μετρήσιμο. (γ) Με δεδομένο ότι κάθε διάστημα του \mathbb{R} είναι Lebesgue μετρησίμο, δείξτε ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R} είναι επίσης Lebesgue μετρησίμο.

(ii) Δείξτε τα παρακάτω. (1) $m^*(\mathbb{Q}) = 0$, όπου \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών. (2) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει V ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} με $m(V) < \epsilon$.

(iii) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. Δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $B \subseteq A$ με B Lebesgue μετρήσιμο, $m^*(A \setminus B) > \epsilon$. (Υπόδειξη: Με εις ατοπο απαγωγή.)

Θέμα 2. (i) Πότε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται Lebesgue μετρήσιμη; Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Lebesgue μετρήσιμη.

(ii) Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f = g$ σχεδόν παντόν και f Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση δείξτε ότι και g είναι Lebesgue μετρήσιμη.

(iii) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, αν x άρρητος και $f(x) = x^4$ αν x ρητός. Δείξτε ότι f είναι Lebesgue μετρήσιμη και υπολογίστε το $\int_{[0,1]} f dm$.

Θέμα 3. (i) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ θετική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $E_n = [f \geq n]$.

1. Δείξτε ότι η ακολουθία $(E_n)_n$ είναι φθίνουσα και ότι $m(E_n) \leq \frac{\int f dm}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Αν $\int f dm < +\infty$, δείξτε ότι $m([f = +\infty]) = 0$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ θετική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ αύξουσα ακολουθία μετρησίμων υποσυνόλων του \mathbb{R} .

Θέτουμε $f_n = f \cdot \chi_{A_n}, n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη και βρείτε το $\lim_n \int f_n dm$.

Θέμα 4. (i) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. Εξετάστε αν $\lim_n \int f_n dm = \int \lim_n f_n dm$. Υπάρχει μετρήσιμη $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ με $\int g dm < +\infty$ και $f_n \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $\int_{[0,1]} |f| dm < +\infty$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n f(x), x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι f_n μετρήσιμη και ότι $\lim_n \int_{[0,1]} f_n dm = 0$.

(iii) Έστω $(E_i)_{i=1}^n$ μια πεπερασμένη ακολουθία μετρησίμων υποσυνόλων του $[0, 1]$. Αν $\sum_{i=1}^n m(E_i) > n - 1$, δείξτε ότι $\bigcap_{i=1}^n E_i \neq \emptyset$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} \cdot$)