

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

## ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΘΗΝΑ 15/2/2002, ΩΡΑ: 15:00

### ΘΕΜΑ 1° (βαθ. 1,5)

Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών,  $x^2 + 3y^2 = cy$ , όπου  $c$  παράμετρος. Να βρεθεί η ορθογώνια τροχιά της οικογένειας αυτών των καμπυλών που διέρχεται από το σημείο  $(1, 2)$ .

### ΘΕΜΑ 2° (βαθ. 2)

Δίνεται η διαφορική εξίσωση,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x > 0,$$

όπου  $p(x), q(x)$  συνεχείς συναρτήσεις για  $x > 0$ .

Μία λύση της εξίσωσης είναι η  $u(x) = x^2$ . Μία άλλη λύση της,  $v(x)$ , ικανοποιεί τις σχέσεις  $W(x) = W[u, v](x) = 1, \quad x > 0, \quad v(1) = -\frac{1}{3}$ , όπου  $W$  η ορίζουσα *Wronski* των  $u, v$ . Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 1, \quad x > 0.$$

### ΘΕΜΑ 3° (βαθ. 1,5)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση,

$$y'' - y' - 2y = 6x + 6e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### ΘΕΜΑ 4° (βαθ. 2)

Να λυθεί, με χρήση του μετασχηματισμού *Laplace*, το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & 2 < t. \end{cases}$$

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** (βαθ. 2)

(α) Να βρεθούν οι έξι πρώτοι όροι της δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  που είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης,

$$2y'' + xy' + y = 0.$$

(β) Να εξετάσετε το είδος των ανωμαλών σημείων (ασθενώς ή ισχυρώς ανώμαλα σημεία) της διαφορικής εξίσωσης:

$$(x^2 - x)y'' + xy' + 7y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup>** (βαθ. 1,5)

Να λυθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων,

$$x' = -3x + 4y, \quad y' = 2x - y, \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

όταν  $x(0) = y(0) = 0$ .

Δίνονται:

1.  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},$

2.  $\mathcal{L}\{\sin \alpha t\} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2},$

3.  $\mathcal{L}\{\cos \alpha t\} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2},$

4.  $\mathcal{L}\{\phi(t - \alpha)H(t - \alpha)\} = e^{-\alpha s}\Phi(s), \quad \alpha \geq 0,$  όπου  $\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \Phi(s)$  και

$$H_{\alpha}(t) = H(t - \alpha) = \begin{cases} 1, & t \geq \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases} \quad \text{η συνάρτηση Heaviside,}$$

5.  $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\phi(t)\} = \Phi(s - \alpha),$  όπου  $\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \Phi(s),$

6.  $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0),$

7.  $\mathcal{L}\{H(t - \alpha)\} = \frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad \alpha \geq 0.$

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**