

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

A) Έστω το μαθηματικό μοντέλο $\{X, \mathcal{X}, p(x|\theta), \theta \in \Theta\}$ στο οποίο πληρούνται οι συνθήκες κανονικής εκτίμησης.

i) Δώστε τον ορισμό της πληροφορίας κατά Fisher $I(\theta)$.

ii) Αποδείξτε ότι $I(\theta) = V\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X|\theta) | \theta\right]$, $\theta \in \Theta$.

B) Από παλιότερες μελέτες είναι γνωστό ότι το pH για ένα υπό έλεγχο χημικό είναι τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Μια παρτίδα 10 δειγμάτων από έναν καινούριο προμηθευτή δίνει τις ακόλουθες τιμές pH.

7.6, 8.4, 8.3, 8.0, 8.2, 7.4, 7.8, 8.2, 8.1, 7.7

Να κατασκευαστεί και να δοθεί ένα 99% Δ.Ε. του μέσου μ .

ΘΕΜΑ 2:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή $Ex(\theta(1/\theta))$, με $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρο.

i) Ελέγξτε αν η παραπάνω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.

ii) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ .

iii) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $1/\theta$.

iv) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. του $g(\theta) = 1/\theta$.

ΘΕΜΑ 3:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $N(0, 1/\theta)$, με $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρο.

i) Να βρεθεί η ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου θ .

ii) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ .

iii) Να βρεθεί η κατανομή της $Y = \theta \sum_{i=1}^n X_i^2$.

iv) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το θ .

ΘΕΜΑ 4:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Γάμμα κατανομή $G(a, p)$, με άγνωστη παράμετρο $a > 0$ και p γνωστό.

i) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το $1/a$.

ii) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. του $g(a) = 1/a$.

iii) Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα του $g(a) = 1/a$ και να συγκριθεί με την διασπορά της Α.Ε.Ε.Δ. που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.