

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

Να αποδείξετε τα παρακάτω δύο πορίσματα:

- i) Έστω η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε, αν η στατιστική συνάρτηση \underline{T} είναι επαρκής για την παράμετρο $\underline{\theta}$, έχουμε ότι και η στατιστική συνάρτηση $\underline{T}^* = \varphi(\underline{T})$ είναι επίσης επαρκής για την παράμετρο $\underline{\theta}$.
- ii) Έστω η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\psi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$. Τότε, αν η στατιστική συνάρτηση \underline{T} είναι επαρκής για την παράμετρο $\underline{\theta}$, έχουμε ότι η \underline{T} είναι επίσης επαρκής και για την $\underline{\theta}^* = \psi(\underline{\theta})$.

ΘΕΜΑ 2:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή Γάμμα με άγνωστες παραμέτρους $a, p > 0$.

- i) Να δειχθεί ότι η το ζεύγος $(\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i)$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\theta} = (a, p)$.
- ii) Να δειχθεί ότι η το ζεύγος $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n \log X_i)$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το $\underline{\theta} = (a, p)$.
- iii) Είναι το ζεύγος $(\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i)$ επαρκής στατιστική συνάρτηση για το (p, a) ;

ΘΕΜΑ 3:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$, με $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρο.

- i) Να βρεθεί η ΕΜΠ $\hat{\theta}$ της άγνωστης παραμέτρου θ .
- ii) Να βρεθεί η εκτιμήτρια με την μέθοδο των ροπών $\tilde{\theta}$ της άγνωστης παραμέτρου θ .
- iii) Να εξετασθεί αν η $\tilde{\theta}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το θ .
- iv) Να εξετασθεί αν η $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το θ .

ΘΕΜΑ 4:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\theta > 0$.

- i) Με την βοήθεια του θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. του $g(\theta) = 1/\theta$.
- ii) Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα του $g(\theta) = 1/\theta$ και να συγκριθεί με την διασπορά της Α.Ε.Ε.Δ. που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 5:

Το ποσοστό (%) μίας ουσίας σε ένα προϊόν που παράγεται από μονάδα παραγωγής Α είναι τ.μ. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Όμοια για το προϊόν που παράγεται από μονάδα παραγωγής Β είναι τ.μ. $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Με βάση τα παρακάτω δεδομένα:

A	8	9	14	16	10	11	13	
B	7	12	6	13	9	8	10	7

- i) Να κατασκευαστεί και να δοθεί ένα 98% Δ.Ε. του λόγου των διασπορών σ_1^2 / σ_2^2 .
- ii) Με βάση το (i) να κατασκευαστεί ένα 99% Δ.Ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$. Τι συμπεραίνετε;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ