

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 27/02/2004

**Θέμα 1** (i) Δίνονται τα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right), \quad A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right],$$

$$A_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2n-1, 2n), \quad A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n-1, 2n].$$

Να εξεταστεί ποια από αυτά είναι ανοικτά, ποια είναι κλειστά και να βρεθούν οι κλειστότητες  $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$ . Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(ii) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος.

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας στον  $(X, \rho)$ .

(β) Δείξτε ότι αν  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι δυο ακολουθίες στον  $(X, \rho)$  και  $x \in X$  ώστε  $x_n \xrightarrow{\rho} x$  και  $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$  τότε  $y_n \xrightarrow{\rho} x$ .

**Θέμα 2** (i) Έστω  $X$  ένα μη κενό σύνολο και  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  μια 1-1 συνάρτηση.

(α) Αν  $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$  για κάθε  $x, y \in X$  δείξτε ότι η  $\rho$  είναι μετρική στον  $X$ .

(β) Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία στον  $X$  και  $x \in X$ . Δείξτε ότι  $x_n \xrightarrow{\rho} x$  αν και μόνο αν  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

(γ) Δείξτε ότι η  $f : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής.

(ii) Έστω  $(X, \rho), (Y, d)$  δυο μετρικοί χώροι και  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής επί. Δείξτε ότι αν το  $D$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $X$  τότε το  $f(D)$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $Y$ .

**Θέμα 3** (i) Δώστε τον ορισμό του ανοικτού υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου και δείξτε ότι οι ανοικτές σφαίρες είναι ανοικτά σύνολα.

(ii) Διατυπώστε και αποδείξτε τις τρεις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων.

**Θέμα 4** (i) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $G \subset X$ . Δώστε τον ορισμό της  $\text{diam}(G)$ . Να δειχθεί ότι αν το  $G$  είναι συμπαγές τότε υπάρχουν  $x_0, y_0 \in G$  ώστε  $\rho(x_0, y_0) = \text{diam}(G)$ .

(ii) Έστω  $(X, \rho)$  ένας πλήρης μετρικός χώρος και  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία κλειστών υποσυνόλων με  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ . Αν η  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής τότε το  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  είναι μονοσύνολο.

**Θέμα 5** (i) Έστω σύνολο συναρτήσεων  $K \subset (C[a, b], \rho_{\infty})$ . (α) Πότε το  $K$  ονομάζεται ισοσυνεχές. Δείξτε ότι αν το  $K$  είναι πεπερασμένο τότε είναι ισοσυνεχές.

(β) Δείξτε ότι αν το  $K$  είναι συμπαγές τότε είναι ισοσυνεχές.

(ii) Έστω  $(X, \rho)$  πλήρης μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε μια ακολουθία  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του  $X$ . Δείξτε ότι το σύνολο  $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$  είναι υπεραριθμήσιμο. [Τυπόδειξη: Δείξτε ότι για κάθε  $x \in X$  το σύνολο  $X \setminus \{x\}$  είναι ανοικτό και πυκνό. Χρησιμοποιήστε απαγωγή σε άτοπο και το Θεώρημα Baire.]