

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
Πραγματική Ανάλυση  
9-10-2006

**Θέμα 1.** (α) (i) Δώστε τον ορισμό της μετρικής.

(ii) Έστω  $X$  μη κενό σύνολο και  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , 1-1 συνάρτηση. Δείξτε ότι η

$$\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

είναι μετρική.

(iii) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 1-1 συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι  $I : (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho_f)$  είναι συνεχής.

(β). (i) Θεωρούμε τα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$

$$A = \mathbb{N}, \quad B = \left\{ n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-1, 0].$$

Βρείτε τα  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$  και υπολογίστε το  $\rho(A, B)$ .

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο  $\{\sqrt{2} + q : q \in \mathbb{Q}\}$  είναι πυκνό στο  $\mathbb{R}$ . (Θεωρήστε γνωστό ότι το  $\mathbb{Q}$  είναι πυκνό στο  $\mathbb{R}$ .)

**Θέμα 2.** (α) (i) Δώστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy, και στο μετρικό χώρο  $(\mathbb{Q}, \rho_{|\cdot|})$  δώστε παράδειγμα ακολουθίας Cauchy που δεν είναι συγκλίνουσα.

(ii) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  ακολουθία Cauchy που έχει υπακολουθία  $(x_{k_n})_n$  συγκλίνουσα. Δείξτε ότι  $\eta (x_n)_n$  συγκλίνει.

(β) (i) Δώστε τον ορισμό των ισοδύναμων μετρικών.

(ii) Δείξτε ότι το  $((0, 1], \rho_{|\cdot|})$  δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(iii) Για  $x, y \in (0, 1]$ , ορίζουμε

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Δείξτε ότι  $d$  είναι μετρική και το  $((0, 1], d)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.

**Θέμα 3.** (α) (i) Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία του  $(X, \rho)$  χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία. Δείξτε ότι το σύνολο  $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $X$ .

(ii) Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Κάθε ανοικτό κάλυμμα  $\{U_i\}_{i \in I}$  του  $X$  έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

(2) Κάθε ακολουθία  $(x_n)_n$  στον  $X$  έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Χρησιμοποιώντας τα 1 και 2, δείξτε ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του  $X$  έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(β) (i) Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφα συνεχούς  $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ .

(ii) Δώστε παράδειγμα  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι συνεχής αλλά δεν απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές.

(iii) Διατυπώστε το λήμμα του Lebesgue και δείξτε ότι κάθε συνεχής  $f : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής όταν ο  $X$  είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

**Θέμα 4.** (α) (i) Έστω  $X$  σύνολο και  $(f_n)_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  συναρτήσεις.

(1) Δώστε τον ορισμό της κατά σημείο και ομοιόμορφης σύγκλισης της  $(f_n)_n$  στην  $f$ .

(2) Πώτε η  $(f_n)_n$  λέγεται κατά σημείο Cauchy?

(ii) Δείξτε ότι αν  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι κατά σημείο Cauchy τότε υπάρχει  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $\eta (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει κατά σημείο στην  $f$ .

(iii) Αποδείξτε ότι αν  $X$  είναι πεπερασμένο σύνολο και  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι κατά σημείο φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία ομοιόμορφα συγκλίνουσα σε μια  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

(iv) Αποδείξτε ότι αν  $X$  είναι αριθμήσιμο σύνολο και  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι κατά σημείο φραγμένο, τότε έχει υπακολουθία κατά σημείο συγκλίνουσα σε μια  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .