

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΔΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ

«ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατ. Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 8/10/2004, ΩΡΑ:15.00

Θέμα 1^ο: (α) (Mov. 0.75). Να βρεθεί το συνημιτονικό ανάπτυγμα Fourier της

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Που συγκλίνει η σειρά;

(β) (Mov. 0.25). Τι τύπου είναι η διαφορική εξίσωση $u_{xy}(x, y) = 0$;

Να επιλυθεί και να δοθεί μία ειδική λύση.

(γ) (Mov. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$x u_x - y u_y = 0, \quad u = u(x, y),$$

όταν $u(x, y) = y^2$ πάνω στην καμπύλη $C: y = x, \quad x > 0$.

Θέμα 2^ο: (α) (Mov. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(1, \varphi) = 5 \sin \varphi, \quad u(2, \varphi) = \cos \varphi.$$

(β) (Mov. 0.25). Για ποιές τιμές του A το πρόβλημα,

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(3, \varphi)}{\partial \rho} = A \cos \varphi, \quad \text{επιλύεται};$$

(γ) (Mov. 0.75). Να δώσετε σε ολοκληρωτική μορφή τη λύση του προβλήματος:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \underline{x} = (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial \underline{y}} = f(x), \quad u(0, y) = g(y),$$

όπου g, f γνωστές συναρτήσεις και \underline{y} η εξωτερική κάθετος.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον \mathbb{R}^2 :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}.$$

Θέμα 3º: (Mov. 2). (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 3, \quad y(0) = y(3) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + \Lambda y(x) = -2 \sin \frac{5\pi x}{3} - 7 \sin \frac{7\pi x}{3}, \quad 0 < x < 3, \quad y(0) = y(3) = 0,$$

για διάφορες τιμές του $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 5º: (Mov. 2). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) = 5u_{xx}(x,t) - 30x, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u(3,t) = 1, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x^3 + x - 28, \quad 0 < x < 3.$$

Θέμα 6º: (Mov. 1). Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να δείξετε ότι η λύση για το πρόβλημα,

$$u_t = k u_{xx} + q(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\text{είναι: } u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{q(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-(x-s)^2/(4k(t-\tau))} d\tau \right) ds,$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier). Ποια (ποσότητα) είναι η συνάρτηση Green για το πρόβλημα;

Δίνονται:

$$1. \quad \mathbf{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx} dx = \hat{u}(s,t),$$

$$2. \quad \mathbf{F}^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx} ds = u(x,t),$$

$$3. \quad \mathbf{F}\{u_{xx}(x,t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,t).$$