

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ

Σεπτέμβριος 2006

Θέμα 1 α) Θεωρούμε τις παρακάτω ορθογώνιες αντιθέσεις:

$$\begin{aligned} C_1 &= \bar{Y}_1 - \bar{Y}_4 \\ C_2 &= \bar{Y}_2 - \bar{Y}_3 \\ C_3 &= \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 - \bar{Y}_1 - \bar{Y}_4 \end{aligned}$$

που ορίζονται στους μέσους των αγωγών πέντε τυχαίων δειγμάτων μεγέθους $n_i = 5$, $i = 1, \dots, 5$. Να ελέγξετε τις παρακάτω υποθέσεις:

$$\begin{aligned} H'_0 &: \mu_1 - \mu_4 = 0 \\ H''_0 &: \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ H'''_0 &: \mu_2 + \mu_3 - \mu_1 - \mu_4 = 0 \end{aligned}$$

σε σ.σ. 5%, χρησιμοποιώντας τα εξής αποτελέσματα: $Y_1 = 49$, $Y_2 = 77$, $Y_3 = 88$, $Y_4 = 108$, $Y_5 = 54$ και $SS_{total} = 636.96$. (Δίνεται $F_{(1,20,0.05)} = 4.35$).

β) Θεωρούμε το μοντέλο ανάλυσης διασποράς με δύο παράγοντες, μικτών επιδράσεων: $Y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + (a\beta)_{ij} + e_{ijk}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, $k = 1, \dots, r$. Να δείξετε ότι:

$$E(MSA) = \sigma^2 + r\sigma_{a\beta}^2 + \frac{qr \sum_{i=1}^p a_i^2}{p-1}.$$

Θέμα 2 α) Μελετάται η επίδραση τεσσάρων διαφορετικών συστατικών (Λατινικά γράμματα) στο χρόνο αντίδρασης μιας χημικής διαδικασίας. Κάθε παρτίδα νέου υλικού (Γραμμές) έχει τέτοιο μέγεθος ώστε επιτρέπει να γίνουν τέσσερις μόνο εκτελέσεις. Επιπλέον, κάθε εκτέλεση απαιτεί περίπου 2 ώρες, ώστε σε μια μέρα μπορούν να γίνουν τέσσερις μόνο εκτελέσεις. Ο πειραματιστής αποφασίζει να εκτελέσει το πείραμα βασισμένο σε ένα λατινικό τετράγωνο, ώστε οι επιδράσεις της ημέρας (Στήλες) και της παρτίδας (Γραμμές) να ελέγχονται συστηματικά. Ο σχεδιασμός με τα αποτελέσματα του πειράματος (χρόνος αντίδρασης) φαίνονται παρακάτω:

Παρτίδα	Ημέρα			
	1	2	3	4
1	C 10	D 14	A 7	B 8
2	B 7	C 18	D 11	A 8
3	A 5	B 10	C 11	D 9
4	D 10	A 10	B 12	C 14

- i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων και να εξαχθούν συμπεράσματα ($\alpha = 0.05$). (Δίνεται $F_{(3,6,0.05)} = 4.76$).
- ii) Να χωριστούν οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα "συστατικά" σε ομάδες με τη μέθοδο του Duncan. (Δίνονται $t_{0.05}(2,6) = 3.46$, $t_{0.05}(3,6) = 3.58$, $t_{0.05}(4,6) = 3.64$).
- iii) Να δοθούν 95 % διαστήματα εμπιστοσύνης για τους μέσους του παράγοντα "παρτίδα". (Δίνεται $t_{(6,0.025)} = 2.447$).

- β) Έστω C και D είναι δύο ορθογώνιες αντιθέσεις που ορίζονται στα αθροίσματα των παρατηρήσεων ενός παράγοντα, με v επίπεδα και n παρατηρήσεις σε κάθε επίπεδο. ($C = \sum_{i=1}^v c_i y_i$, $D = \sum_{i=1}^v d_i y_i$). Να δείξετε ότι $Cou(C, D) = 0$.

- Θέμα 3** α) Ένας μηχανικός μελετά την απόδοση τεσσάρων τύπων λαδιού. Χρησιμοποίησε τέσσερις τύπους μηχανών σαν μπλοκ και έκανε το πείραμα σύμφωνα με τον παρακάτω σχεδιασμό.

Αγωγή (τύπος λαδιού)	Μηχανή			
	1	2	3	4
1	19	18		20
2		15	17	16
3	15	16	15	
4	16		15	14

- i) Να κάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν ο τύπος λαδιού (αγωγές) είναι σημαντικός. (Δίνεται $F_{(3,5,0.05)} = 5.41$).
- ii) Να βρείτε τις *intrablock* $\{\hat{\tau}_i\}$ εκτιμήτριες των επιδράσεων των αγωγών, και να χωρίσετε τους προσαρμοσμένους μέσους των αγωγών σε ομάδες με το κριτήριο του Duncan ($\alpha=0.05$). (Δίνονται $r_{0.05}(2, 5) = 3.64$, $r_{0.05}(3, 5) = 3.74$, $r_{0.05}(4, 5) = 3.79$).
- iii) Να βρείτε τις *interblock* $\{\tilde{\tau}_i\}$ εκτιμήτριες των επιδράσεων των αγωγών.
- β) Να δείξετε ότι οι εκτιμήτριες $\{\hat{\tau}_i\}$ και $\{\tilde{\tau}_i\}$ είναι ασυσχέτιστες.
- Θέμα 4** α) Ένας μηχανικός μελετά την απόδοση μιας διαδικασίας. Υπάρχουν δύο μεταβλητές που ενδιαφέρουν, ο χρόνος αντίδρασης (A) και η θερμοκρασία της αντίδρασης (B). Εκτελείται ένας 2^2 σχεδιασμός με πέντε κεντρικά σημεία. Τα αποτελέσματα είναι:

Συνδυασμός Αγωγών	Παραγοντική Επίδραση		Απόκριση	Κεντρικά σημεία	Απόκριση
	A	B			
(1)	-	-	58.9	(0,0)	60.2
a	+	-	60.5	(0,0)	60.4
b	-	+	60.1	(0,0)	60.6
ab	+	+	61.2	(0,0)	60.5
				(0,0)	60.3

- Να κάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν οι παράγοντες A, B καθώς και η αλληλεπίδραση τους AB είναι σημαντικοί. Είναι η καμπυλότητα σημαντική; (Δίνεται ότι $F(1, 4, 0.05) = 7.71$).
- β) Θεωρούμε το μοντέλο παλινδρόμησης: $\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$, που αντιστοιχεί σε έναν 2^k παραγοντικό σχεδιασμό. Αν $\hat{\underline{\beta}}$ είναι η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του $\underline{\beta}$, να δείξετε ότι:

$$V(\hat{\underline{\beta}}) = \frac{\sigma^2}{n} I_n.$$

Διάρκεια εξέτασης 2:30 ώρες