

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι 16/2/2004

Θέμα 1. (α). Δώστε τον ορισμό του $\sup A$, $A \subset \mathbb{R}$. Αν A, B μη κενά άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} , δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(β). Διατυπώστε την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία ρητών $(q_n)_n$ με $\lim q_n = x$.

(γ). Διατυπώστε τον ορισμό της σιγκλίνουσας ακολουθίας και δείξτε ότι το όριο της είναι μοναδικό.

Θέμα 2. (α). Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει τότε η $(a_n)_n$ συγκλίνει στο 0.

(β). Αν $0 < \theta < 1$, και $k \in \mathbb{N}$, σταθερός, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \theta^n$ συγκλίνει και συμπεράνετε ότι $\lim_n n^k \theta^n = 0$.

(γ). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Θέμα 3. (α). Διατυπώστε το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (Bolzano) για συνεχείς συναρτήσεις και αποδείξτε ότι αν $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ συνεχής με $f(a) = b, f(b) = a$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = x_0$.

(β). Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ). Διατυπώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $M > 0$ σταθερό, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq M$. Δείξτε ότι:

(1) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

(2) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4. (α). Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{1}{(x+3)^2 + 4^2} dx, \quad \int_0^1 \arctan x dx, \quad \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx.$$

Υπόδειξη: Για το δεύτερο χρησιμοποιείστε παραγοντική ολοκλήρωση και για το τρίτο αντικατάσταση.

(β). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [0, 1] \text{ άρρητος} \\ 0, & \text{αν } x \in [0, 1] \text{ ρητός.} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Θέμα 5. (α). Δώστε το πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x) = x^2 e^x$.

(β). Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $\ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν κάθες υπακολουθία της $(a_n)_n$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο ℓ , τότε $\lim_n a_n = \ell$.

(γ). Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$ είναι σταθερή. Δείξτε ότι f είναι σταθερή.