

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΣΕΜΦΕ 5^ο εβ. 12/02/2004

Απαντήσεις και 6η 4 Ιδεοδυναμικά Θέματα:

1. Εστω $G = \{e, x_2, x_3, \dots, x_{12}\}$ μία πολλαπλασιαστική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το e . Στην G λεχύνου:

$$x_2^c \neq e \text{ για } 1 \leq c \leq 6 \text{ αλλά } x_2^6 = e, x_3^2 = e, x_3 x_2 = x_2^{-1} x_3.$$

α) Διώσε μία υποομάδα της G , H , ταύτης 6.

β) Δείξε ότι το γινόμενο $x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_2^3 \cdot x_3$ μπορεί να γραφεί 6^η μορφή $x_2^k x_3^\lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{Z}$.

γ) Δείξε ότι υπάρχει στην G μπορεί να γραφεί 6^η μορφή $x_2^k x_3^\lambda$, όπου $0 \leq k \leq 5$ και $0 \leq \lambda \leq 1$.

δ) Αναριθμήσε τα στοιχεία της G διήρκεια με το έρωτη γ) και δώσε τα δικτυωμένα τα υποομάδα H της G .

ε) Είναι η H κανονική; Διαπιστώσε την απάντηση γ).

2. I) Εστω (G, \cdot) ομάδα και $h \in G$. Κάθε στοιχείο της μορφής $g^{-1} h \cdot g$, όπου $g \in G$, λέγεται ευφύγειος του h , και το σύνολο $\{g^{-1} h \cdot g \mid g \in G\}$ λέγεται η ιδιαίτερη διαίρεση του h .

α) Δείξε ότι οι ιδιαίτερες ευφύγιες ούτε των στοιχείων $h \in G$ διαπίσουν την G . Ποιαί είναι οι αντιστοιχικές 6^η Ιδεοδυναμικές;

β) Δείξε ότι ευφύγειο στοιχεία έχουν την ίδια ταύτη.

γ) Δείξε ότι τα ευφύγεια ab και ba έχουν την ίδια ταύτη.

- II) Εστω $N \trianglelefteq G$. Δείξε ότι $N \trianglelefteq G$ αν και μόνο αν η N είναι η ιδιαίτερη των ιδιαίτερων ευφύγιες των στοιχείων $n \in N$.

3. a) Εστω $\sigma = (165)(43261)$ και $\tau = (43261)(165)$ δύο μεταθέσεις της S_6 . Βρείτε τις μεταθέσεις σ^{-1} , σ^3 και αναζητήστε τις μεταθέσεις $\sigma^{-1}\tau$ και $\tau\sigma^{-1}$ της γινόμενος σύνων μεταθέσεων.

- β) Δείξε ότι υπάρχει $\sigma \in S_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων (ij) , όπου $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

- γ) Δείξε ότι $\sigma \cdot (ij) \cdot \sigma^{-1} = (\sigma(i) \ \sigma(j))$ για κάθε $\sigma \in S_n$.
- δ) Χρησιμοποιήσε το γ) για να δείξετε ότι κάθε $\sigma \in S_n$ προσειναγόραζει ως γινόκερο των αντιμεταθέσεων $(12), (13), \dots, (1n)$.
- ε) Αναζητήστε την μεταθέση σ^{-1} του ερώτηματος α) σύμφωνα με το έρωτημα δ).

4. α) Διαρυνώστε το Θεώρητα Ταξινόμησης των πενερασκένα παραγόμενων αβεριανών ομάδων (Π.Π.α.ο.).
- β) Δώστε όρες της διαφορετικής Π.Π.α.ο. ταχύτης 100.
- γ) Δεδομένου ότι τα στοιχεία της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ περιγράφονται γεωμετρικά ως τα σημεία του καρτεσιανού επιπέδου με ανεπαρτέσιμες συνένεσης, δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των υποομάδων: (i) $\langle (3,3) \rangle$ και (ii) $\langle 3 \rangle \times \langle 3 \rangle$.
- δ) Αναγνωρίστε τις ομάδες: (i) $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (2,3) \rangle}$ και (ii) $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle 3 \rangle \times \langle 3 \rangle}$

ως προς το Θεώρητα Ταξινόμησης Π.Π.α.ο. και στη συέχεια δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των σύμφωνα με το έρωτημα,

Διαρυτικά εσέρδους : 3 ώρες.

Καλή επιτυχία! Σ. Λαζαροπούλων