

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών**

ΑΘΗΝΑ 3/10/2007,

ΩΡΑ: 12:00

Θέμα 1° (1,5 μον.)

A) Να δοθεί ένα παράδειγμα ημιγραμμικής μ.δ.ε. πρώτης τάξης με ανεξάρτητη μεταβλητή στον \mathbb{R}^3 . (0,25 μον.).

B) Να βρεθεί ο τύπος της μ.δ.ε.

$$(\cos^2 x)u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - u_{yy} + 5e^x u_x = 0. \quad (0,25 \text{ μον.})$$

Γ) Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$u_x + u_y = u, \quad u(x, 0) = \sin x. \quad (1 \text{ μον.})$$

Θέμα 2° (3,5 μον.)

A) Να επιλυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(\rho, \varphi) = \rho^5 \cos 5\varphi, \quad 2 < \rho < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=2} = 5, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=3} = \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (0,75 \text{ μον.})$$

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

B) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x, y, t) = u_{tt}(x, y, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 2, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = 5 \sin \pi x \sin \pi y, \\ u_t(x, y, 0) = \sin 2\pi x \sin \frac{3\pi y}{2}. \end{array} \right\} \quad (1,75 \text{ μον.})$$

Γ) Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}(0, x_2) = h(x_2), \quad x_2 \in (-\infty, +\infty) \end{array} \right\} \quad (1 \text{ μον.})$$

όπου $\hat{\eta}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον \mathbb{R}^2 :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2]^{1/2}, \quad \underline{x} = (x_1, x_2).$$

Θέμα 3° : (2 μον.)

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 1 < x < e, \quad y(1) = y'(e) = 0.$$

β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \Lambda y(x) = 1, \quad 1 < x < e, \quad y(1) = y'(e) = 0.$$

για διάφορες τιμές του $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4° : (2 μον.)

(Α)(μ.1,3). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την

εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - x, & 0 < x < 3, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(3,t) = 2, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 3. \end{cases}$$

$\frac{x}{6} - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν $u = u(x,t)$ παριστάνει θερμοκρασία.

(Β)(μ. 0,7). Στο παρακάτω πρόβλημα, να περιγράψετε τον τρόπο επίλυσης του και να βρείτε μία ειδική λύση του:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = a(t), \quad u(L,t) = b(t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Θέμα 5° : (1μον.)

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί το πρόβλημα

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u, \quad u_x \rightarrow 0, \quad \text{όταν } |x| \rightarrow \infty,$$

$$u \text{ είναι φραγμένη όταν } y \rightarrow \infty.$$

(Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Δίνονται (να κάνετε χρήση μόνο αυτών των τύπων και να δώσετε τη λύση υπό ολοκληρωτική μορφή):

$$1. \quad \mathbf{F}\{u(x,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{isx} dx = \hat{u}(s,y),$$

$$2. \quad \mathbf{F}^{-1}\{\hat{u}(s,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,y) e^{-isx} ds = u(x,y),$$

$$3. \quad \mathbf{F}\{u_{xx}(x,y)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,y).$$