



**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών.  
Κανονική γραπτή εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση I**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....**

**1. (α)** Έστω  $(\alpha_v), (\beta_v), (\gamma_v)$  τρεις ακόλουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες, ώστε  $\alpha_v \leq \beta_v \leq \gamma_v, \forall v \in \mathbb{N}$ . Αν  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha_v = \alpha = \lim_{v \rightarrow +\infty} \gamma_v$ , δείξτε ότι  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \beta_v = \alpha$ .

**(β)** Κάνοντας χρήση μόνο του ορίου  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e$ , δείξτε ότι  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{v}\right)^v = \frac{1}{e}$ .

**2. (α)** Αν η σειρά  $\sum_1^{+\infty} |\alpha_v|$  συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, δείξτε ότι:

(i) υπάρχει  $v_0(1) \in \mathbb{N}$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $v > v_0(1)$  να ισχύει  $|\alpha_v| < 1$ .

(ii) η σειρά  $\sum_1^{+\infty} \alpha_v^2$  συγκλίνει. (Εννοούται το πανω)

**(β)** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

$$(i) \sum_1^{+\infty} \frac{1}{v} \sin \frac{1}{v}, \quad (ii) \sum_1^{+\infty} \frac{\sin v + \cos v}{v!}, \quad (iii) \sum_1^{+\infty} \left(1 + \frac{4}{3v}\right)^v$$

**3. (α)** Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \sin \frac{1}{x}\right)$

**(β)** Να δείξετε ότι  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

**(γ)** Να λυθεί η εξίσωση  $\tanh x = \frac{2}{3}$ .

**4.** Να υπολογιστούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (ii) \int \frac{dx}{2+\sin x}, \quad (iii) \int \frac{e^x+1}{e^{2x}+3} dx$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες  
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ