

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Φυσικού

ΑΘΗΝΑ 23/5/2007, ΩΡΑ: 8.30

Θέμα 1^ο:

(α) (Mov. 0.5). Να δοθεί η γενική μορφή της ημιγραμμικής και της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης σε διδιάστατα χωρία ($u = u(x_1, x_2)$):

(β) (Mov. 0.5). Να προσδιορίσετε τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης:

$$x_1 u_{x_1 x_1} + x_2^2 u_{x_2 x_2} - u_{x_1} = 1, \quad u = u(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(γ) (Mov. 2). Να προσδιοριστεί το A ώστε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών να είναι επιλύσιμο:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \rho < 2, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=2} = A + 2 \cos(3\varphi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

και να βρεθεί η λύση του.

Θέμα 2^ο: (Mov. 2).

Να βρεθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y) = -1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \sin 7\pi x.$$

Θέμα 3^ο:

(α) (Mov. 1.5). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 2, \quad y(0) = y'(2) + y(2) = 0.$$

(β) (Mov. 1.5)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση

θερμότητας:
$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < a, \quad t > 0, \quad (a > 0) \\ u(0, t) = u(a, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Θέμα 4^ο: (Mov. 2).

Με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού να βρεθεί η λύση του προβλήματος :

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = f(x) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow +\infty$$

(Η λύση να δοθεί υπό ολοκληρωτική μορφή).

Δίνεται:

Μετασχηματισμός Fourier

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx = \hat{f}(s),$$

$$F^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{-isx} ds = f(x),$$

$$F\{f''(x)\} = (-is)^2 \hat{f}(s),$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ