



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

1. (α) Δώστε τον ορισμό του $\sup A$ (αντ. $\inf A$) για ένα μη κενό άνω φραγμένο (αντ. κάτω φραγμένο) υποσύνολο του \mathbb{R} . Στη συνέχεια δείξτε ότι για δύο μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα A, B του \mathbb{R} ισχύει $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(β) Υπολογίστε το supremum και το infimum των συνόλων

$$A = \{y : y = x^4 - 2x^2 + 5, x \in [-2, 2]\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{v}, v \in \mathbb{N} \right\}$$

και στη συνέχεια τα $\sup(2A)$, $\inf(2A)$, $\sup(AB)$, $\inf(AB)$, όπου $AB = \{\alpha\beta, \alpha \in A, \beta \in B\}$.

2. (α) Δείξτε με τη βοήθεια των ορισμών της σύγκλισης ότι (i) $a^n \rightarrow 0$, αν $|a| < 1$ και (ii) $a^n \rightarrow +\infty$, αν $a > 1$.

(β) Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = 6 \frac{1+x}{7+x}, x > 0$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη

Lipschitz με σταθερά $M < 1$. Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) με x_1 αυθαίρετο θετικό αριθμό και $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (x_n) είναι συστολική και βρείτε το όριο αυτής. Τι παρατηρείτε; 1/2, 1/2

3. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n$, όπου $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$, βρείτε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n. \text{ Στη συνέχεια δείξτε ότι } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n^2}{n!}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(3n+4)n^3\sqrt{n^2}}$

4. (α) Να υπολογιστούν τα όρια: (i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^x$, (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2-2x}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln x}{x}}$.

(β) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις ακόλουθες συναρτήσεις πάνω στα σύνολα που ορίζονται:

$$(i) f(x) = \sqrt{x+1}, x \in [0, +\infty), (ii) g(x) = \tan x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right), (iii) h(x) = e^{\cosh x}, x \in [1, 2005].$$

5. (α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt \text{ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο } [\alpha, \beta]. \text{ (β) Αν } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \in [0, 1] \\ \text{Arc tan } x, & x \in (1, \sqrt{3}] \end{cases}$$

Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$, την αριστερή και τη δεξιά παράγωγο της $F(x)$ στο $x=1$ και την τιμή $F(\sqrt{3})$.