

Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου

25-10-2007

Θέμα 1 (Μονάδες 3.0)

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^3 - 6x + 1 = 0$. (1)

α) Να δειχθεί ότι η (1) έχει μία μοναδική ρίζα ρ στο διάστημα $[0, 1]$.

β) Να δείξετε ότι η επαναληπτική μέθοδος:

$$x_{k+1} = g(x_k) = \frac{x_k^3 + 1}{6}$$

συγκλίνει στο ρ για κάθε αρχικό σημείο $x_0 \in [0, 1]$.

γ) Να γίνει γραφικός εντοπισμός των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \ln|1+x| - 1/x = 0.$$

Να υπολογιστεί η θετική ρίζα, εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο Newton–Raphson, εκτελώντας δύο επαναλήψεις. (Αρχική προσέγγιση από τον γραφικό εντοπισμό των ριζών). ($x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$).

Θέμα 2 (Μονάδες 2.5)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ για $x \in [-1, 1]$. Να υπολογιστεί η απόσταση h των σημείων παρεμβολής (θεωρούνται ισαπέχοντα), έτσι ώστε να προσεγγίζεται η $f(x)$ με πολυώνυμο παρεμβολής *Lagrange* 2^{ου} βαθμού και με ακρίβεια d δεκαδικών ψηφίων. (Για ευκολία στις πράξεις θεωρείστε κατάλληλα σημεία παρεμβολής). Δίνεται

ο γενικός τύπος του σφάλματος $\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}$.

β) Δίνεται ο πίνακας τιμών της $f(x) = (1+x^2)^{1/2}$

x_i	0	1	2	3
f_i	1.000	1.414	2.236	3.162

Να υπολογίσετε τον πίνακα των διηρημένων διαφορών για τα δεδομένα του πίνακα. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα αυτόν για να υπολογίσετε:

- Ένα γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από τα δύο πρώτα σημεία
- Ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο που διέρχεται από τα τρία πρώτα σημεία
- Ένα κυβικό πολυώνυμο που διέρχεται από όλα τα σημεία.

Υπολογίστε προσεγγίσεις της τιμής $f(2.1)$, εφαρμόζοντας τα πολυώνυμα (ii) και (iii).

Θέμα 3 (Μονάδες 2)

α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος. Να προσεγγίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ όταν $h=0.2$, με τον κατάλληλο σύνθετο τύπο Τραπεζίου.

β) Αν ο σύνθετος τύπος Τραπεζίου εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. ($E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$).

Θέμα 4 (Μονάδες 2.5)

α) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} x = b.$$

Να υπολογιστούν οι επαναληπτικοί πίνακες B_J και B_{G-S} των μεθόδων *Jacobi* και *Gauss-Seidel* αντίστοιχα, και στην συνέχεια με βάση αυτούς, να εξετάσετε αν οι αντίστοιχες επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν.

β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί η παραγοντοποίηση $A=LU$, εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss χωρίς οδήγηση, (οι πράξεις να είναι ακριβείς, κλάσματα). Εν συνεχεία να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα A με διάνυσμα σταθερών όρων $b = [5, -1, 4]^T$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ