

ΘΕΜΑΤΑ

1) Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach και $x_0 \in X$.

Δείξτε ότι υπήρχε σεθεντική περιοχή του x_0 περιέχει τουλάχιστο μία ευθεία που περνάει από το x_0 .

2) (i) Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T: X \rightarrow Y$ ένας γραμμικός τραnsformis με πεδίο ορισμού $D(T) = Z \subset X$. Υποθέτουμε ότι το γεράμι $G(T)$ του T είναι ιστημένο στο $X \times Y$. Δείξτε ότι ο χώρος Z εκδιαγράμμιζες με την νόρμα

$$\|x\| = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$$

έίναι χώρος Banach.

(ii) Έστω $X = C^1[0,1]$ και $Y = C[\bar{0},1]$ εκδιαγράμμιζει με τη sup νόρμα. Δείξτε ότι ο διαφορικός τραnsformis

$T = \frac{d}{dt}: X \rightarrow Y$: δεν είναι γραμμικός και ουτό είναι γεράμι κτυπεό.

3) Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) του X γραμμικής σεθεντικής είναι x_0 στ και μόνο στην προσήλια της ακολουθίας συμπίκει: (i) η ακολουθία $(\|x_n\|)$ έίναι γραμμική και (ii) $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ για υπήρχε $f \in B$, οπου B πρέπει να είναι του X^* .

4) Εστιν X ανακλαστικός χωρών Banach και (x_n) ημίεγχην αποτούδια του X . Διέτθεται υπόκλιδια (x_{n_k}) που εγκαίνια για την ρολογία $\epsilon(X, X^*)$.

5). Εστιν $1 \leq p < q < \infty$. Διέτθεται

(i) ο $L^q[\alpha, \beta]$ είναι υποχώρος του $L^p[\alpha, \beta]$

(ii) για όποια $f \in L^q[\alpha, \beta]$ ισχεί

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q (\beta - \alpha)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

6) Εστιν X χωρός με ρόρη και (f_n) ακολούθια του X^* .

(i) αν $f_n \xrightarrow{*} f$ για την ρολογία $\epsilon(X^*, X)$, τότε $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$

είναι ημίεγχην και ισχεί $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$

(ii.) αν $f_n \xrightarrow{*} f$ και $x_n \rightarrow x$, τότε $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

$\subseteq X^*$ το $A(x) \subseteq \mathbb{R}$ γενικεύεται στην απόγευμα.

• f είναι $T_f : X \rightarrow \mathbb{R}$: $T_f(x) = f(x), \dots$