

# ΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ (RENORMALIZATION)

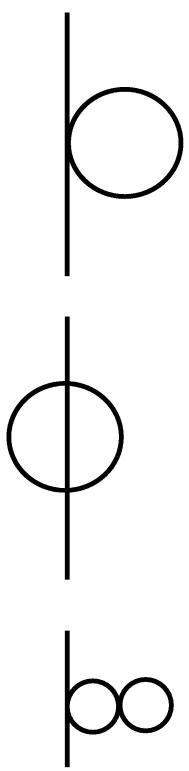
Θεωρία  $\phi^4$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4$$

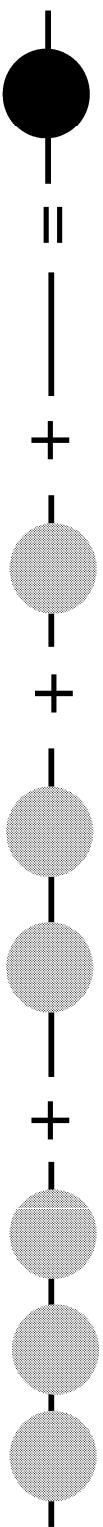
Κανόνες Feynman

$$\frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}$$

Διαγράμματα 1PI, 1 particle irreducible, περιέχουν όλη την πληροφορία από βρόχους



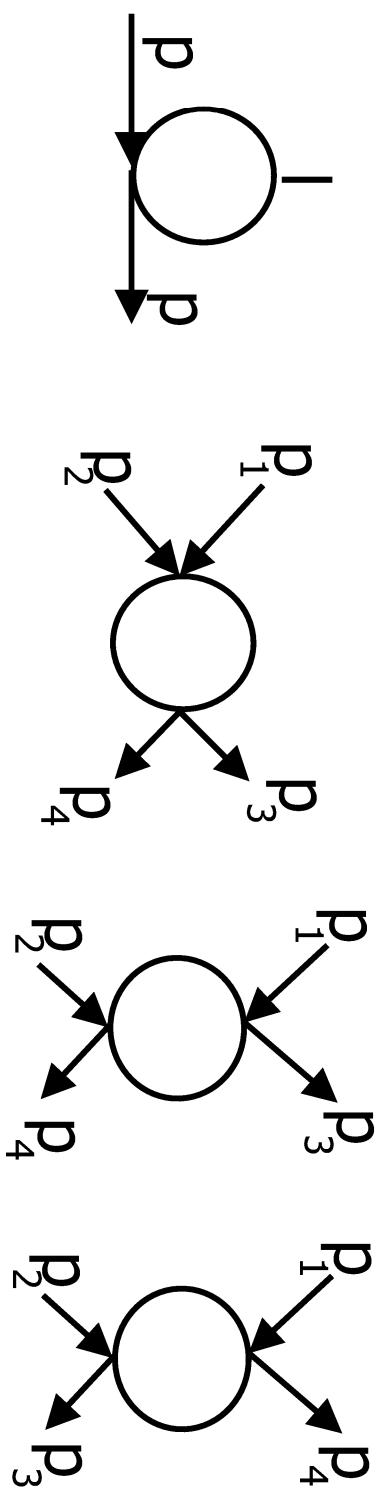
Για τον διαδότη  $i\Delta(p)$  του πεδίου  $\phi$



$$\begin{aligned} i\Delta(p) &= \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + i\Sigma(p^2) \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}} \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} \end{aligned}$$

Οι απειρίες “κρύβονται” στο  $\Sigma(p^2)$ , δηλαδή στα 1PI διαγράμματα.

## Διαγράμματα 1 βρόχου



$$-i\Sigma(p^2) = \frac{-i\lambda_0}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} \quad \text{τετραγωνική απειρία } 4/2$$

$$\Gamma(p^2) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{(l-p)^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{l^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}$$

$\Gamma(p^2 \rightarrow t), \quad \Gamma(p^2 \rightarrow t)$  λογαριθμική απειρία  $2/2$

Χρειαζόμαστε ένα „πρόγραμμα ομαλοποίησης“, ώστε τα ολοκληρώματα να μπορούν να υπολογιστούν και οι απειρίες να εμφανίζονται με την άρση της ομαλοποίησης (π.χ. όταν το όριο  $A^2$  τείνει στο άπειρο ή οι διαστάσεις του χωροχρόνου τείνουν στις 4).

## Πρέπει

- να απομονώσουμε το άπειρο τμήμα από το πεπερασμένο τμήμα του διαγράμματος και
- να απορροφήσουμε το άπειρο τμήμα **με κάποιο συνεπή τρόπο** επανα-օρίζοντας τα  $\mu_0$ ,  $\lambda_0$  και  $\phi_0$ .

Με παραγώγιση ως προς την εξωτερική ορμή μειώνεται ο βαθμός απειρείας του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma(p^2)}{\partial p^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} p^\mu \frac{\partial \Gamma(p^2)}{\partial p^\mu} \\ &= \frac{\lambda_0^2}{2p^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l-p) \cdot p}{((l-p)^2 - \mu_0^2 + i\epsilon)^2} \frac{i}{l^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

...και η απειρία 'εξαφανίστηκε'!!

- Με πεπερασμένο αριθμό παραγωγίσεων μπορούμε να κάνουμε κάθε ολοκλήρωμα πεπερασμένο

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(p^2 = 0) = \sum a_n \frac{1}{n!} (p^2)^n$$

όπου  $a_n = \frac{\partial^n}{\partial p^2} \Gamma(p^2) \Big|_{p^2=0}$

με  $a_n$  πεπερασμένα

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2)$$

με  $\tilde{\Gamma}(p^2 = 0) = 0$

και  $\tilde{\Gamma}(p^2) = \Gamma(p^2) - \Gamma(0)$

## Ανακανονικοίση μάζας και κυματοσυνάρτησης

Αναπτύσσουμε το  $\Sigma(p^2)$  γύρω από το (αρχικά αυθαίρετο)  $p^2 = \mu^2$

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu^2) + (p^2 - \mu^2)\Sigma'(p^2) + \tilde{\Sigma}(p^2)$$

Το  $\Sigma(\mu^2)$  παρουσιάζει τετραγωνική απειρία ενώ το  $\Sigma'(p^2)$  παρουσιάζει λογαριθμική απειρία και  $\tilde{\Sigma}(p^2 = \mu^2) = 0$

Βέβαια, ειδικά στην  $\phi^4$  και για 1 βρόχο, το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την εξωτερική οριμή. Βέβαια σε 2 βρόχους αυτή η ιδιαίτερητα δεν ισχύει.

Οπότε η αρχική σχέση για τον πλήρη διαδότη γράφεται

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}$$

$$\frac{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(\mu^2) - (p^2 - \mu^2)\Sigma'(p^2) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon}{i}$$

Διαλέγω το αυθαίρετο  $\mu^2$  έτσι ώστε

$$\mu_0^2 + \Sigma(\mu^2) = \mu^2$$

οπότε

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{(p^2 - \mu^2)(1 - \Sigma'(\mu^2)) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon}$$

Η φυσική μάζα ορίζεται ως ο πόλος του διαδότη.  
Άρα,  $\mu$  είναι η φυσική, ανακανονικοποιημένη μάζα.

Δουλεύοντας στη θεωρία διαταραχών, τα  $\Sigma$  είναι τάξης  $\lambda_0$  (και  $\delta\nu\omega$ ). Οπότε

$$(p^2 - \mu^2)(1 - \Sigma'(\mu^2)) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon =$$

$$(1 - \Sigma'(\mu^2))(p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon)$$

οπότε

$$i\Delta(p^2) = \frac{i[1 - \Sigma'(\mu^2)]^{-1}}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon} \equiv \frac{iZ_\phi}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\epsilon}$$

Επαναρρίζουμε την  $\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_0$

$$i\Delta_R(p) = \int d^4x e^{-ipx} <0|T(\phi(x)\phi(0)|0> =$$

$$Z_\phi^{-1} \int d^4x e^{-ipx} <0|T(\phi_0(x)\phi_0(0)|0> = Z_\phi^{-1} i\Delta(p)$$

Η  $Z_\phi$  είναι η σταθερά ανακανονικοίσης της  
κυματοσυνάρησης

Για τις συναρτήσεις Green

$$G_R^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = < 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 > = \\ Z_\phi^{-n/2} < 0 | T(\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n)) | 0 > = Z_\phi^{-n/2} G_0(n)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Πηγαίνοντας από τις  $G$  στις  $\Gamma$  διώχνουμε τα MH 1PI και τους  
εξωτερικούς διαδότες οπότε

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{Z_\phi^{n/2}}{Z_\phi^{-n}} \Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_\phi^{n/2} \Gamma_0(p_1, \dots, p_n)$$

## Διαστατική ομολοποίηση

Η βασική ιδέα είναι η μείωση των διαστάσεων του χώρου ολοκλήρωσης

$$\int d^4 l \frac{1}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{έχει λογαριθμική απειρία}$$

$$\int d^2 l \frac{1}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{είναι πεπερασμένο για } l \rightarrow \infty$$

Έχοντας το ολοκλήρωμα  $\int d^4l F(l, k)$ , εισάγω την συνάρτηση  $I(\omega, k) = \int d^2\omega l F(l, k)$  με ω μιγαδικό. Υπολογίζω το  $I(\omega, k)$  στην περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου δεν έχει απειρίες.

Βρίσκω μια συνάρτηση  $(I'(\omega, k))$  που

- συμπίπτει με την  $I(\omega, k)$  στην περιοχή σύγλισης της και
- έχει καθορισμένα σημεία μη συγκλισης (απειρίες) εκτός της περιοχής αυτής. Η  $I'(\omega, k)$  θεωρείται η αναλυτική συνέχεια της  $I(\omega, k)$

Παράδειγμα. Αναπαράσταση Euler για την συνάρτηση  $\Gamma(z)$ ,

$$Re(z) > 0$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$$

Για  $Re(z) < 0$  αποκλίνει. Αλλά

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^a dt e^{-t} t^{z-1} + \int_a^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \\ &= \int_0^a dt \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} + \int_a^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^a dt t^{n+z-1} + \int_a^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \\ \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{a^{n+z}}{z+n} + \int_a^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα έχει απλούς πόλους για  $z = 0, -1, -2, \dots$ .  
Η τελευταία σειρά αποτελεί την Weirstrass αναπαράσταση της  
 $\Gamma(z)$ .

Παρατηρήστε ότι είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του  $a$   
 $(\frac{d\Gamma}{dt} = 0)$ .

Δηλαδή, χρειάστηκε η εισαγωγή μιας σταθεράς αλλά το  
αποτέλεσμα ΔΕΝ εξαρτάται από αυτή!!

ΕΜΕΙΣ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ WEIRSTRASS  
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΑΣ!!

$$\int d^{2\omega}l \frac{1}{(l^2 + m^2)^2} \quad d^{2\omega}l \rightarrow d^4l \, d^{2\omega-4}l$$

Ας δούμε το δεύτερο διαφορικό

$$d^{2\omega-4}l \rightarrow d\Omega_{2\omega-4} L^{2\omega-5} dL$$

$$(d^3x = d\Omega_3 x^2 dx)$$

$$\int d\Omega_n = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \dots \int_0^\pi d\theta_{n-1} \sin^{n-2} \theta_{n-1}$$

$$\left(\Omega_3 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta\right)$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin^m \theta = \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

Ἄρα ἔχουμεν

$$\int d^{2\omega}l \frac{1}{(l^2 + m^2)^2} = \int d^4l \int d\Omega_{2\omega-4} \int_0^\infty dL L^{2\omega-5} \frac{1}{(l^2 + L^2 + m^2)^2}$$

$$\frac{2\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega-2)} \int d^4l \int_0^\infty dL L^{2\omega-5} \frac{1}{(l^2 + L^2 + m^2)^2}$$

$\Gamma_{\text{f}} \alpha L \rightarrow 0$  όπου πρέπει  $2\omega - 5 > 0$ , άρα  $\gamma \omega \leq 2 \Delta E_N$

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ.

$\Gamma_{l\alpha} l, L \rightarrow \infty$  θα πρέπει  $4 + 1 + 2\omega - 5 < 4$  ή  $\omega < 2$ . Άρα για

$\omega \geq 2 \Delta \text{EN} \Sigma \Upsilon \Gamma K \Lambda I E I$ .

Γράφοντας  $L^{2\omega-6} = \frac{1}{(\omega-2)} \frac{d(L^2)^{\omega-2}}{dL^2}$  και ολοκληρώνοντας κατά μέρη (διώχνοντας το “επιφανειακό ολοκλήρωμα”), έχουμε

$$\frac{\pi^{\omega-2}}{(\omega-2)\Gamma(\omega-2)} \int d^4l \int_0^\infty dL (L^2)^{\omega-2} \left( -\frac{d}{dL^2} \frac{1}{(l^2 + L^2 + m^2)^2} \right) =$$

$$\frac{\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega-1)} \int d^4l \int_0^\infty dL (L^2)^{\omega-2} \frac{2}{(l^2 + L^2 + m^2)^3}$$

Για  $l, L \rightarrow \infty$  δεν αλλάζει, βέβαια, η περιοχή σύγκλισης ( $\omega \geq 2$ ). Άλλα για  $L \rightarrow 0$  θα πρέπει  $1 + 2\omega - 4 > 0$  οπότε αποκλείνει για  $\omega \leq 1$ .

Άρα υπάρχει περιοχή σύγκλισης  $1 < \omega < 1$ .

# Η ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

ΚΑΙ Η Δ.Ο.

Θεωρία με  $g, m$ , “γυμνές”, παραμέτρους.

Πηγαίνουμε σε  $n$  διαστάσεις.

Η Λαγρανζιανή πυκνότητα έχει  $n$  διαστάσεις

(μιας και η Λαγρανζιανή  $L = \int d^4x \mathcal{L}$  πρέπει να είναι αδιάστατη).

Κρατώντας τη μάζα με διάσταση 1,

η αδιάστατη στις 4 διαστάσεις  $g$

παίρνει υποχρεωτικό διαστάσεις (φυσικά ανάλογες του  $(n - 4)$ ).

Για παράδειγμα,

$$\text{για } \phi^4: [g] = 4 - n, \quad \text{για QED: } [g] = \frac{4 - n}{2}$$

Οι συναρτήσεις Green θα παρουσιάσουν πόλους για  $n = 4$ .

Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλες σταθερές ανακανονικοίησης παίρνουμε τις ανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green, που **είναι αναλυτικές για  $n = 4$** .

Παραμετροπούμε τις αναλ. συν.  $G$  με  $m_R$  και  $g_R$ . Οι MH αν. σταθερές  $m$  και  $g$ , θα εξαρτώνται από τις αν. σταθερές, το  $n$  και μια αυθαίρετη σταθερά  $\mu$  με διαστάσεις μάζας, αυτής που απορροφά τις διαστάσεις του  $g$ .

Φυσικά, σε μηδενική τάξη προσέγγισης,  $g_R = g$  και  $m_R = m$ .

$$\Gamma_R^{(N)} = \lim_{n \rightarrow 4} \tilde{\Gamma}_R^{(N)} = \lim_{n \rightarrow 4} (Z^{N/2} \Gamma^{(N)})$$

Ας γράψουμε πιο αναλυτικά τις εξαρτήσεις  $\Gamma_R^{(N)}(p, g_R, m_R, \mu)$  όπου  $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_N)$

$$\Gamma_R^{(N)}(p, g_R, m_R, \mu) =$$

$$\lim_{n \rightarrow 4} \tilde{\Gamma}_R^{(N)}(p, g_R(n, g\mu^{(4-n)\rho}), m Z_m^{-1}(n, g\mu^{(4-n)\rho}), \mu, n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow 4} Z^{N/2}(n, g\mu^{(4-n)\rho}) \Gamma^{(N)}(p, g, m, n)$$

όπου γράψαμε  $m_R = Z_m^{-1}m$

$$\text{Τώρα παραγίζουμε } \frac{\partial}{\partial \ln \mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{\Gamma}_R^{(N)} (p, g_R(n, g\mu^{(4-n)\rho}), m Z_m^{-1}(n, g\mu^{(4-n)\rho}), \mu, n) = \\
& \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z^{N/2}(n, g\mu^{(4-n)\rho}) \Gamma^{(N)}(p, g, m, n) \\
& \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g_R} + \mu m \frac{\partial Z_m^{-1}}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_R} \right) \tilde{\Gamma}_R^{(N)} = \\
& \frac{N}{2} \mu Z^{N/2-1} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \Gamma^{(N)} = \frac{N}{2} \mu \frac{\partial Z}{\partial \mu} \frac{1}{Z} Z^{N/2} \Gamma^{(N)} = \frac{N}{2} \mu \frac{\partial Z}{\partial \mu} \frac{1}{Z} \tilde{\Gamma}_R^{(N)} \\
& \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g_R} + \mu m \frac{\partial Z_m^{-1}}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_R} - \frac{N}{2} \mu \frac{\partial Z}{\partial \mu} \frac{1}{Z} \right) \tilde{\Gamma}_R^{(N)} = 0
\end{aligned}$$

Την τελευταία σχέση την ξαναγράφουμε ως

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta}(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} - m_R \tilde{\gamma}_m(g_R) \frac{\partial}{\partial m_R} - \frac{N}{2} \tilde{\gamma}(g_R) \right) \tilde{\Gamma}_R^{(N)} = 0$$

όπου

$$\tilde{\beta}(g_R) = \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu}, \quad \tilde{\gamma}_m(g_R) = \mu \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \mu}, \quad \tilde{\gamma}(g_R) = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}$$

Παίρνοντας το όριο  $n \rightarrow 4$  πηγαίνουμε στα  $\Gamma_R^{(N)}$ ,  $\beta(g_R)$ ,  $\gamma_m(g_R)$  και  $\gamma(g_R)$  που είναι όλες ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ποσότητες (εξαρτώνται από ανακανονικοποιημένα μεγέθη).

$\Sigma\tau\eta$  Διαστατική Ομαλοποίηση μπορούμε να γράψουμε

$$g\mu^{(4-n)\rho} = g_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(g_R, m_R, \mu)}{(n-4)^{\nu}}$$

$$m = m_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}(g_R, m_R, \mu)}{(n-4)^{\nu}} = m_R Z_m$$

$$Z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{\nu}(g_R, m_R, \mu)}{(n-4)^{\nu}}$$

δηλαδή,  $g$ ,  $m$  και  $Z$  είναι οι ANAKANONIKOPOIHMENEΣ τιμές + ό,τι πόλοι απαλούνται για να απαλείψουμε τους πόλους που εμφανίζονται στα διαγράμματα Feynman.

Αποδεικνύεται ότι τα  $a_\nu$ ,  $b_\nu$  και  $c_\nu$  δεν εξαρτώνται από το  $\mu$ , ενώ τα  $a_\nu$  και  $c_\nu$  δεν εξαρτώνται από το  $m_R$ . Επομένως το  $Z_m$  δεν εξαρτάται από το  $\mu$  ούτε από το  $m_R$ .

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\beta(g_R) = \rho \left( a_1 - g_R \frac{\partial a_1}{\partial g_R} \right)$$

$$\gamma(g_R) = \rho g_R \frac{\partial c_1}{\partial g_R}$$

$$\gamma_m(g_R) = \rho \frac{g_R}{m_R} \frac{\partial b_1}{\partial g_R}$$

δηλαδή η εξάρτηση σίναται μόνο από τον ΑΠΛΟ πόλο.

Θέλουμε να δούμε πώς συμπεριφέρεται η  $\Gamma_R^{(N)}$  όταν οι οριμές  $p_i \rightarrow \alpha p_i$ , όπου  $\alpha$  αδιάστατος αριθμός. Άν  $D_\Gamma$  είναι η διάσταση (μάζας) της  $\Gamma_R^{(N)}(p, g_R, m_R, \mu)$ , τότε ο τελεστής

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m_R \frac{\partial}{\partial m_R}$$

δίνει τη διάσταση της  $\Gamma_R^{(N)}$

$$\left( \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \right) \Gamma_R^{(N)} = D_\Gamma \Gamma_R^{(N)}$$

Εισάγοντας τον όρο  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$  από την εξίσωση της ομάδας ανακανονικοίησης, έχουμε

$$\left( -\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} - \frac{N}{2} \gamma - (1 + \gamma_m) m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + D_\Gamma \right) \Gamma_R^{(N)} = 0$$

Αυτή η εξίσωση λύνεται

$$\Gamma_R^{(N)}(\alpha p, g_R, m_R, \mu) = \alpha^{D_\Gamma} \exp\left(-\int_1^\alpha \frac{ds}{s} \gamma(\bar{g}_R(s))\right) \Gamma_R^{(N)}(p, \bar{g}_R, \bar{m}_R, \mu)$$

όπου τα  $\bar{g}_R$  και  $\bar{m}_R$  ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial \bar{g}_R(s)}{\partial \ln s} = \beta(\bar{g}_R(s)), \quad \frac{\partial \bar{m}_R(s)}{\partial \ln s} = \bar{m}_R(s) [1 + \gamma_m(\bar{g}_R(s))]$$

με αρχικές συνθήκες  $\bar{g}_R(s=1) = g_R$  και  $\bar{m}_R(s=1) = m_R$ .

Οι ποσότητες  $\bar{g}_R(s)$  και  $\bar{m}_R(s)$  είναι οι λεγόμενες ‘‘running’’ αντίστοιχες σταθερές (σταθερά σύζευξης και μάζα).

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Η $\phi^4$ ΘΕΩΡΙΑ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_B)^2 - \frac{1}{2} m_B^2 \phi_B^2 - \frac{1}{4!} g_B \phi_B^4$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τις αναπτύξεις ως

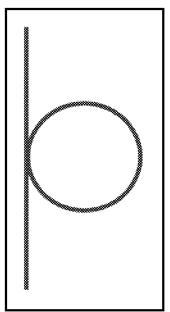
$$g\mu^{(4-n)}\rho = g_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(g_R, m_R, \mu)}{(n-4)^\nu} = g_R \left( 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{a_{\nu j} g_R^j}{(n-4)^\nu} \right)$$

$$m^2 = m_R^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}(g_R, m_R, \mu)}{(n-4)^\nu} = m_R^2 \left( 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{b_{\nu j} g_R^j}{(n-4)^\nu} \right)$$

$$Z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{\nu}(g_R, m_R, \mu)}{(n-4)^\nu} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{c_{\nu j} g_R^j}{(n-4)^\nu}$$

$$\Sigma = \frac{m_B^2 g_B}{16\pi^2} \frac{1}{n-4}$$

Οπότε



$$\begin{aligned} p^2 - m_B^2 - \Sigma &= p^2 - m_R^2 \left( 1 + \frac{b_{11}g_R}{n-4} \right) - \frac{m_B^2 g_B}{16\pi^2} \frac{1}{n-4} = \\ p^2 - m_B^2 - \Sigma &= p^2 - m_R^2 \left( 1 + \frac{b_{11}g_R}{n-4} \right) - \frac{m_R^2 g_R}{16\pi^2} \frac{1}{n-4} = \\ p^2 - m_R^2 \left( 1 + \left( b_{11} + \frac{1}{16\pi^2} \right) \frac{g_R}{n-4} \right) \end{aligned}$$

όπου αντικαταστήσαμε στον τελευταίο όρο τα  $m_B$  και  $g_B$  με τα  $m_R$  και  $g_R$  μιας και είμαστε σε τάξη  $g_R$ . Οπότε, βλέπουμε ότι

$$b_{11} = -1/(16\pi^2) \cdot \Delta\eta\lambda\delta\bar{h}$$

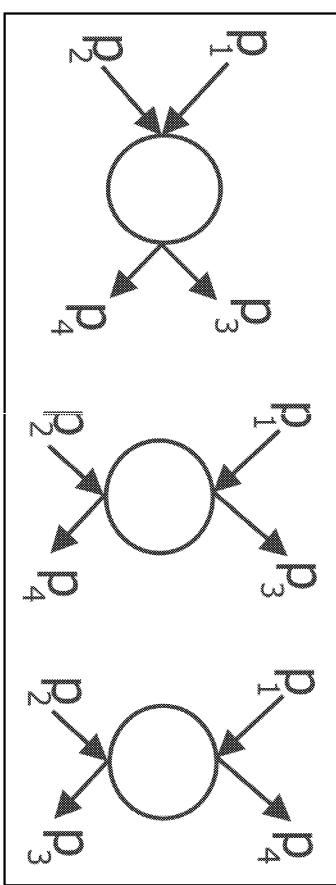
$$m_B^2 = m_R^2 \left( 1 - \frac{1}{16\pi^2} \frac{g_R}{n-4} \right)$$

Όπως είχαμε αναφέρει και στην αρχή, σε πρώτη προσέγγιση το  $\Sigma$  δεν εξαρτάται από την εξωτερική ορμή. Οπότε, σε πρώτη προσέγγιση δεν ανακανονικοποιείται η χυματοσυνάρτηση  $\phi$ .  
 $\Delta\eta\lambda\delta\bar{h}$

$$Z = 1 + 0 \cdot g_R = 1$$

Προχωράμε στην ανακανονικοπόίηση της σταθεράς σύζευξης

$$\Gamma_B^{(4)} = \frac{3g_B^2}{16\pi^2} \frac{1}{n-4}$$



Aλλά

$$\Gamma_R^{(4)} = Z^{4/2} \Gamma_B^{(4)} = \Gamma_B^{(4)} = \frac{3g_B^2}{16\pi^2} \frac{1}{n-4}$$

Επομένως, αν στην αρχική Λαγκρανζιανή αντικαταστήσουμε το

$$g_B \rightarrow g_R \left( 1 + \frac{a_{11}g_R}{n-4} \right)$$

και επιλέξουμε  $a_{11} = -\frac{3g_R}{16\pi^2}$ , το όπειρο τμήμα θα απαλειφθεί.

$\Delta\eta\lambda\delta\eta$

$$g_B \mu^{4-n} = g_R \left( 1 - \frac{3g_R}{16\pi^2} \frac{1}{n-4} \right)$$

Επομένως, ξαναγράφουμε τη Λαγκρανζιανή με τη μορφή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_B)^2 - \frac{m_R^2}{2} \left( 1 + b_{11} \frac{g_R}{n-4} \right) \phi_B^2 - \frac{\mu^{n-4} g_R}{4!} \left( 1 + \frac{a_{11}g_R}{n-4} \right) \phi_B^4$$

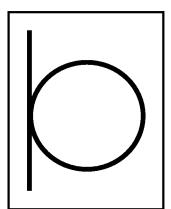
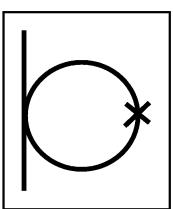
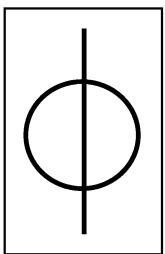
Προχωράμε σε τάξη  $g^2$  για την  $\Gamma^{(2)}$ , οπότε να βρούμε και την πρώτη μη τετριμμένη συνεισφορά στο  $Z$ .

$$\frac{m_R^2 g_R}{32\pi^2} \left[ \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n/2-2} \frac{2a_{11}g_R}{(n-4)^2} + \frac{2+(\gamma-1)a_{11}g_R}{n-4} \right]$$

$$\frac{m_R^2 g_R^2}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n-4} \frac{1}{(n-4)^2} + \frac{(4\gamma-2)m_R^2 g_R^2}{(32\pi^2)^2(n-4)}$$

$$\frac{m_R^2 g_R^2 b_{11}}{16\pi^2} \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n/2-2} \frac{1}{(n-4)^2} + \frac{\gamma b_{11} m_R^2 g_R^2}{32\pi^2(n-4)}$$

$$\frac{m_R^2 g_R^2}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n-4} \frac{1}{(n-4)^2} + \frac{1}{n-4} \frac{g_R^2}{(16\pi^2)^2} \left[ \frac{p^2}{12} - \frac{3}{2} m_R^2 + \gamma m_R^2 \right]$$



Στο πρώτο διάγραμμα χρησιμοποιήσαμε τον πλήρη όρο

$$g_R \left( 1 + \frac{a_{11} g_R}{n - 4} \right)$$

Στον δεύτερο και στον τέταρτο όρο, έχουμε ήδη  $g_R^2$  από τις δύο κορυφές, ενώ στο τρίτο διάγραμμα, το σύμβολο  $\mathbf{X}$  προέρχεται από τον όρο  $\frac{m_R^2 b_{11} g_R}{n - 4}$  της Λαγκρανζιανής.

Τα γ παρουσιάζονται από την ανάπτυξη του  $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1$

Το  $\Sigma$  είναι το άθροισμα όλων των παραπάνω συνεισφορών.

Οπότε, τελικά

$$\begin{aligned}
 p^2 - m_B^2 - \Sigma &= p^2 - m_R^2 \left( 1 + \frac{b_{11}g_R}{n-4} + \frac{b_{12}g_R^2}{n-4} + \frac{b_{22}g_R^2}{(n-4)^2} \right) - \Sigma = \\
 p^2 \left[ 1 - \frac{g_R^2}{12(16\pi^2)^2} \frac{1}{n-4} \right] - m_R^2 \left[ 1 + \frac{g_R^2}{n-4} \left( b_{12} - \frac{1}{2(16\pi^2)^2} \right) + \right. \\
 \left. \frac{g_R^2}{(n-4)^2} \left( b_{22} - \frac{2}{(16\pi^2)^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Όπως περιμέναμε, δεν υπάρχουν άπειροι όροι ανάλογοι του  $g_R$ , εφόσον σ' αυτήν την τάξη τους είχαμε απαλείψει

$$-m_R^2 \frac{b_{11}g_R}{n-4} - \frac{m_R^2 g_R^2}{32\pi^2} \frac{2}{n-4} = 0, \quad \text{με } b_{11} = -1/16\pi^2$$

Γι' αυτό ακριβώς το λόγο δεν υπάρχουν πλέον και όροι ανάλογοι του  $\gamma$ , ή ακόμα ανάλογοι του  $\ln \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}$  που προέρχονται από την ανάπτυξη

$$\left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n-4} = 1 + (n-4) \ln \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}((n-4)^2)$$

Ξαναγράφουμε τη σχέση

$$p^2 - m_B^2 - \Sigma = p^2 A - m_R^2 B = A(p^2 - m_R^2 B A^{-1}).$$

$$BA^{-1} =$$

$$\left[ 1 + \frac{g_R^2}{n-4} \left( b_{12} - \frac{1}{2(16\pi^2)^2} \right) + \frac{g_R^2}{(n-4)^2} \left( b_{22} - \frac{2}{(16\pi^2)^2} \right) \right].$$

$$\left[ 1 - \frac{g_R^2}{12(16\pi^2)^2} \frac{1}{n-4} \right]^{-1}$$

$$\left[ 1 + \frac{g_R^2}{n-4} \left( b_{12} - \frac{1}{2(16\pi^2)^2} + \frac{1}{12(16\pi^2)^2} \right) + \frac{g_R^2}{(n-4)^2} \left( b_{22} - \frac{2}{(16\pi^2)^2} \right) \right]$$

Επομένως, όταν πρέπει

$$b_{12} = \frac{5}{12} \frac{1}{(16\pi^2)^2} \quad \text{και} \quad b_{22} = \frac{2}{(16\pi^2)^2}$$

και

$$\frac{1}{p^2 - m_B^2 - \Sigma} = \frac{A^{-1}}{p^2 - m_R^2}$$

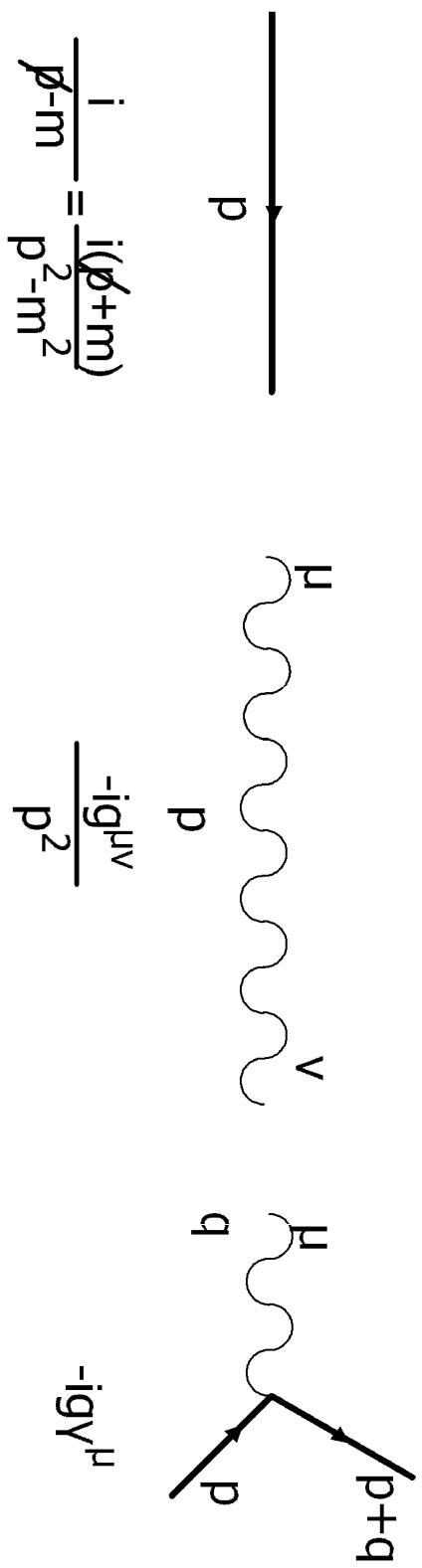
Θα πρέπει  $Z^{-1} \frac{1}{p^2 - m_B^2 - \Sigma} = \frac{Z^{-1} A^{-1}}{p^2 - m_R^2}$  να είναι αναλυτική.

Οπότε

$$Z = A^{-1} = \left[ 1 + \frac{g_R^2}{12(16\pi^2)^2} \frac{1}{n-4} \right]$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Οι κανόνες Feynman



Ανακανονικοποίηση της χυματοσυνάρτησης του ηλεκτρονίου και  
της μάζας του

$$-i\Sigma = \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} (-ig\gamma^\mu) \frac{i}{p - q - m} (-ig\gamma^\nu) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} (-g^2) \left[ \gamma^\mu \frac{i}{p - q - m} \gamma^\nu \right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} (-g^2) \frac{\gamma^\mu (p - q + m) \gamma_\mu}{(p - q)^2 - m^2} \frac{1}{q^2}$$

Οι γ πίνακες πρέπει να είναι και αυτοί σε  $n$  διαστάσεις. Οπότε  
 $[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = 2g^{\mu\nu}$ ,  $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1\dots)$  και τελικά  $\gamma^\mu \gamma_\mu = n$   
 $\gamma^\mu \not{=} \gamma_\mu = (2-n)\not{=}$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Feynman για τον συνδυασμό των  
δύο διαδοτών

$$\frac{1}{a^k b^m} = \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)\Gamma(m)} \int_0^1 dx \frac{x^{k-1}(1-x)^m}{(ax+b(1-x))^{k+m}}$$

ο πρώτος όρος στο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)(p-q)}{q^2((p-q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{(2-n)(p-q)}{(2\pi)^n (q^2 - 2pqx + p^2x - m^2x)^2} =$$

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{i\pi^{n/2}}{(2\pi)^n} \Gamma(2-n/2) \frac{(p-qx)(2-n)}{(p^2x - m^2x - p^2x^2)^{2-n/2}} \right]$$

ενώ ο δεύτερος όρος δίνει

$$nm(i\pi^{n/2}) \int_0^1 dx \frac{1}{\Gamma(2-n/2) (p^2x - m^2x - p^2x^2)^{2-n/2}}$$

Επειδή όμως μας ενδιαφέρει ο άπειρος όρος ( $\sim 1/(n-4)$ ) και έχουμε μόνο απλό πόλο από την  $\Gamma$  συνάρτηση, μπορούμε όλους τους άλλους όρους να τους υπολογίσουμε για  $n=4$ . Οπότε,

αθροίζοντας τους δύο όρους έχουμε

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - n/2)(4m - p)$$

και τελικά  $\Gamma(2 - n/2) = \Gamma(-\epsilon/2) = -2/\epsilon - \gamma + 1 + \dots$

$$-i\Sigma = \frac{ig^2}{(16\pi^2)\epsilon} (-2p + 8m)$$

Τι πενθυμίζουμε για τον πλήρη διαδότη του γλεκτρονίου

$$\frac{i}{p - m} + \frac{i}{p - m} (-i\Sigma) \frac{i}{p - m} + \\ \frac{i}{p - m} (-i\Sigma) \frac{i}{p - m} (-i\Sigma) \frac{i}{p - m} + \dots = \frac{i}{p - m - \Sigma}$$

Έποιησε, μετά τους υπολογισμούς μας, ο πλήρης διαδότης γράφεται

$$\frac{i}{\not{p} - m - \Sigma} = \frac{i}{\not{p} - m - \left[ \frac{g^2}{(16\pi^2)\epsilon} (2\not{p} - 8m) \right]} =$$

$$\frac{i}{\not{p} \left( 1 - \frac{2g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right) - m \left( 1 - \frac{8g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right)} =$$

$$\frac{i \left( 1 - \frac{2g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right)^{-1}}{\not{p} - m \left( 1 - \frac{8g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right) \left( 1 - \frac{2g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right)^{-1}} =$$

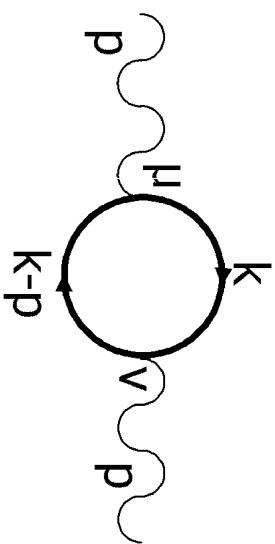
$$\frac{i \left( 1 + \frac{2g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right)}{\not{p} - m \left( 1 - \frac{6g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right)} \equiv Z_\psi \frac{i}{\not{p} - m_R}$$

' $\Delta\varphi$

$$Z_\psi = 1 + \frac{2g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \quad \text{at}$$

$$m_R = m \left( 1 - \frac{6g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right) \rightarrow m = m_R \left( 1 + \frac{6g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right) \equiv m_R Z_m$$

Ανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης του φωτονίου



$$i\Pi g^2 = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[ (-ig\gamma^\mu) \frac{i(k + m)}{k^2 - m^2} (-ig\gamma^\nu) \frac{i(k - p + m)}{(k - p)^2 - m^2} \right] (-1) =$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} g^2 \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (k + m) \gamma^\nu [k - p + m]]}{(k^2 - m^2)((k - p)^2 - m^2)} (-1)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\text{Tr} [\gamma^\mu (k + m) \gamma^\nu (k - p + m)] = \text{Tr} [\gamma^\mu k^\nu \gamma^\nu (k - p)] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] =$$

$$4 [(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) k_\rho (k - p)_\sigma + m^2 g^{\mu\nu}]$$

έχουμε τους εξής δύο τύπους ολοκληρωμάτων

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\rho (k-p)_\sigma}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \not{\epsilon} m^2$$

Συνδυάζοντας τους διαδότες a la Feynman και ολοκληρώνοντας έχουμε για το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{\Gamma(2-n/2) p_\sigma p_\rho x(x-1)}{[p^2 x(1-x) - m^2]^{2-n/2}} + \frac{\Gamma(1-n/2) \frac{1}{2} g_{\sigma\rho}}{[p^2 x(1-x) - m^2]^{1-n/2}} \right]$$

και για το δεύτερο

$$\int_0^1 dx m^2 \frac{\Gamma(2-n/2)}{[p^2 x(1-x) - m^2]^{2-n/2}}$$

Χρησιμοποιώντας και το  $\text{Tr}$  καταλήγουμε στα εξής για τα δύο ολοκληρώματα

$$4\Gamma(2-n/2) \left[ -\frac{1}{3} p^\mu p^\nu + \frac{1}{3} p^2 g^{\mu\nu} - m^2 g^{\mu\nu} \right], \quad 4\Gamma(2-n/2) m^2 4g^{\mu\nu}$$

Αυθοίζοντας και παίρνοντας το άπειρο τυρίμα έχουμε

$$i\Pi^{\mu\nu} g^2 = \frac{i g^2}{16\pi^2 \epsilon} \frac{8}{3} [p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu]$$

Επομένως ο πλήρης διαδότης του φωτονίου  $iD^{\mu\nu}$  είναι

$$\begin{aligned} iD^{\mu\nu} &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig^{\mu\lambda}}{p^2} i\Pi_{\lambda\sigma} g^2 \frac{-ig^{\sigma\nu}}{p^2} + \\ &\frac{-ig^{\mu\lambda}}{p^2} i\Pi_{\lambda\sigma} g^2 \frac{-ig^{\sigma\rho}}{p^2} i\Pi_{\rho\kappa} g^2 \frac{-ig^{\kappa\nu}}{p^2} + \dots = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig^{\mu\lambda}}{p^2} i\Pi_{\lambda\sigma} g^2 iD^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

ή ξαναγράφοντας

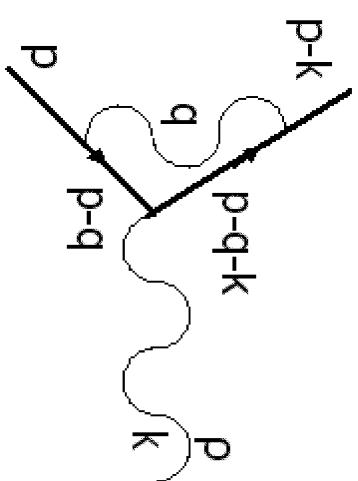
$$\left( g_\sigma^\mu - \frac{g^{\mu\lambda}}{p^2} \Pi_{\lambda\sigma} g^2 \right) iD^{\sigma\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2}$$

Έχουμε ήδη βρεί το  $\Pi_{\lambda\sigma} g^2$ , απ' όπου μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο ανάλογο του  $p^\mu p^\nu$  λόγω της διατήρησης του ρεύματος (ο όρος αυτός δεν συνεισφέρει στο πίνακα σκέδασης). Αύνοντας ως προς  $D^{\mu\nu}$  έχουμε

$$iD^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2 \epsilon}} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} \left( 1 + \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2 \epsilon} \right)^{-1} = Z_A \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2}$$

και επομένως  $Z_A = 1 - \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2 \epsilon}$ .

## Ανακανονικοποίηση της σταθεράς σύζευξης



$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} (-ig\gamma^\nu) \frac{i}{p - q - k - m} (-ig\gamma^\rho) \frac{i}{p - q - m} (-ig\gamma^\mu) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Μπορούμε να κάνουμε κανονικά τους υπολογισμούς, αλλάς ας δούμε πώς μπορούμε να τους αποφύγουμε! Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει λογαριθμικά ( $4/4$ ). Επομένως, το άπειρο τμήμα δεν εξαρτάται από καμιά ορική και μπορούμε να βάλουμε

$k = 0$ . Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{i}{q - p - m} = \frac{i g \gamma^\mu}{(q - p - m)^2} = \frac{i}{q - p - m} \frac{-i g \gamma^\mu}{(q - p - m)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial p^\rho} \frac{q}{p \cancel{v} \frac{p-q}{\mu} p} = \frac{p \cancel{v} \frac{p-q}{\mu} p}{k=0}$$

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε το άπειρο τμήμα από το διάγραμμα 1-βρόχου ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου-φωτονίου παραγωγής, ως προς την εξωτερική οριή, το άπειρο τμήμα από το διάγραμμα που χρησιμοποιήσαμε για την ανακανονικοποίηση της χυματοσυνάρτησης και της μάζας του

ηλεκτρονίου.

$$-\frac{g}{\partial p^\rho} \frac{i g^2}{(16\pi^2)\epsilon} (-2p^\rho + 8m) = \frac{2ig^3\gamma^\rho}{(16\pi^2)\epsilon}$$

Επομένως

$$-ig\gamma^\rho \rightarrow -ig\gamma^\rho \left( 1 - \frac{2ig^3}{(16\pi^2)\epsilon} \right) \equiv Z_{\psi\psi A}^{-1}(-ig\gamma^\rho)$$

$\Gamma_{\ell\alpha}\tau\eta\nu$  συνάρτηση Green λσχύσι  $\Gamma_{\psi\psi A}^R = Z_A^{1/2} Z_\psi \Gamma_{\psi\psi A}$ . Επομένως

$$\begin{aligned} \Gamma_{\psi\psi A}^R &= \left( 1 - \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{2g^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right) (-ig\gamma^\rho) \left( 1 - \frac{2ig^3\gamma^\rho}{(16\pi^2)\epsilon} \right) = \\ &\left( 1 + \frac{4}{3} \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} \right) (-ig\gamma^\rho) \equiv -ig_R\gamma^\rho \end{aligned}$$

$$\text{Αρ\alpha}, \; g = g_R \left( 1 - \frac{\frac{4}{3}}{16\pi^2 \epsilon} \frac{g^2}{\epsilon} \right)$$

$$Z_\psi = 1 + \frac{2g_R^2}{(16\pi^2)\epsilon}$$

$$m = m_R \left( 1 + \frac{6g_R^2}{(16\pi^2)\epsilon} \right)$$

$$Z_A = 1 - \frac{8}{3} \frac{g_R^2}{16\pi^2 \epsilon}$$

$$g = g_R \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{g_R^2}{16\pi^2 \epsilon} \right)$$

και η συνάρτηση  $\beta$  της KΗΔ είναι ( $a_1 = -\frac{4}{3} \frac{g_R^3}{16\pi^2}$ )

$$\beta = \frac{1}{2} \left( a_1 - g_R \frac{\partial a_1}{\partial g_R} \right) = \frac{2}{3} \frac{g_R^3}{16\pi^2}$$