

**Μαθηματική Χρηματοοικονομική Θεωρία**  
ΣΕΜΦΕ 27-6-2012.

**Θέμα 1.** Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων  $S = \{1, 2, \dots, S\}$ , σύνολο χρονικών περιόδων  $T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$  και διαμέριση πληροφορίας  $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_T\}$ . Υποθέτουμε ότι ένα μέγεθος της οικονομίας (π.χ. χρηματοοικονομικό συμβόλαιο) αναπαρίσταται από τη συνάρτηση  $x : T \times S \rightarrow \mathbb{R}$  και έστω  $p = (p_1, p_2, \dots, p_S)$  είναι το διάνυσμα πιθανότητας των διαφόρων καταστάσεων.

- (i) Πότε η συνάρτηση  $x$  είναι στοχαστική ανέλιξη και πότε είναι martingale;
- (ii) Αν  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\Delta_0 = \{S\}$ ,  $\Delta_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ ,  $\Delta_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ , και  $x(0, s) = 6$ , για κάθε  $s$ ,  $x(1, 1) = x(1, 2) = 5$ ,  $x(1, 3) = x(1, 4) = 8$ ,  $x(2, 1) = 6$ ,  $x(2, 2) = 3$ ,  $x(2, 3) = 10$ ,  $x(2, 4) = 5$ .
- (a) Η  $x$  είναι στοχαστική ανέλιξη;
- (b) Αν  $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , η  $x$  είναι martingale;
- (c) Προσδιορίστε διάνυσμα πιθανότητας  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  ώστε η  $x$  να είναι martingale.

**Θέμα 2.** Αν στη στοχαστική οικονομία του προηγούμενου θέματος,  $\Delta_t = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ , και  $F_t$  η άλγεβρα που παράγεται από τη  $\Delta_t$ , ποιά είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς την  $F_t$ ; Αποδείξτε την απάντησή σας.

**Θέμα 3:** Περιγράψτε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) και δώστε παράδειγμα ενός τέτοιου συμβολαίου οκτώ χρονικών περιόδων όπου ο επενδυτής υιοθετεί τη short position.

**Άσκηση 4.** Έστω στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  σύνολο χρονικών περιόδων  $T = \{0, 1, 2, 3\}$  και διαμερίσεις πληροφορίας

$$\Delta_0 = \{S\}, \Delta_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}, \Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\},$$

$$\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο χρηματοοικονομικά συμβόλαια με αποδόσεις

$$V^1 = (0, 2, 3, 1, 3, 3, 4, 0, 1, 4, 1), V^2 = (0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 2)$$

και τιμές

$$q^1 = (3, 2, 3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0), q^1 = (2, 1, 2, 3, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Να γραφούν οι εξισώσεις προϋπολογισμού για τυχαία επένδυση  $z$  και τυχαίο αρχικό αγαθό  $\omega$ . Προσδιορίστε τον πίνακα αποδόσεων. Στη συνέχεια δώστε τον αντίστοιχο ορισμό και εξετάστε αν στην αγορά υπάρχει κερδοσκοπία.

**Άσκηση 5.** Έστω μετοχή που εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο σε διάστημα τριών χρονικών περιόδων 0, 1, 2 με αρχική τιμή  $S_0 = 10$  Ευρώ, συντελεστή ανόδου  $a = 1.2$ , συντελεστή καθόδου  $b = 0.9$  και επιτόκιο  $r = 0.02$ . Προσδιορίστε, από τη πλευρά του εκδότη του δικαιώματος, χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης  $t = 2$  και τιμή εξάσκησης  $k = 11$  Ευρώ.

Εξηγήστε πως αυτή η στρατηγική αντισταθμίζει τον κίνδυνο στη περίπτωση δύο συνεχών ανόδων της τιμής της μετοχής.

**Άσκηση 6.** Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , σύνολο χρονικών περιόδων  $T = \{0, 1, 2, 3\}$  και διαμέριση πληροφορίας  $\Delta_0 = \{S\}$ ,  $\Delta_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ ,  $\Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5, 6\}\}$ ,  $\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ . Έστω το χρηματοοικονομικό συμβόλαιο  $x = (0, 2, 5, 4, 6, 3, 2, 5, 1, 3, 0, 1, 1)$ , ως προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης.

Αν  $p = (\frac{3}{24}, \frac{2}{24}, \frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{4}{24}, \frac{9}{24})$  είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων των διαφόρων καταστάσεων, να τιμολογηθεί forward-start δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  με ημερομηνία εξάσκησης  $t = 3$ , τιμή εξάσκησης  $k = 1$  και ως προς τη χρονική στιγμή  $t = 1$ .

Καλή Επιτυχία.