

Μαθηματική Χρηματοοικονομική Θεωρία  
ΣΕΜΦΕ 30-6-2010.

**Θέμα 1.** (1) Δώστε τον ορισμό του παιγνίου παικτών. Πότε το παιγνιό είναι καθαρής και πότε μεικτής στρατηγικής; Δώστε τον ορισμό της ισορροπίας κατά Nash.

(2) Δώστε τον ορισμό του ανταγωνιστικού παιγνίου και της συνάρτησης απόδοσης των παικτών  $E(x, y)$ . Δείξτε ότι:

$$\min_{y \in S_n} E(x, y) = \min\{E(x, e_1), E(x, e_2), \dots, E(x, e_n)\}.$$

**Θέμα 2.** Εστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων  $S = \{1, 2, \dots, S\}$ , σύνολο χρονικών περιόδων  $T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$  και διαμέριση πληροφορίας  $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_T\}$ . Υποθέτουμε ότι ένα μέγεθος της οικονομίας (π.χ. χρηματοοικονομικό συμβόλαιο) αναπαρίσταται από τη συνάρτηση  $x : T \times S \rightarrow \mathbb{R}$  και έστω  $\Delta_{t_0} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$  και έστω  $p = (p_1, p_2, \dots, p_S)$  είναι το διάνυσμα πιθανότητας των διαφόρων καταστάσεων.

- 1) Ποια είναι η φυσική σημασία της ιδιότητας:  $x(t_0, i) = x(t_0, j)$  για κάθε  $i, j \in \sigma_r$  και για κάθε  $r = 1, 2, \dots, k$ ;
- 2) Ποια είναι η εκλέπτυνση (filtration) που αντιστοιχεί στη  $\delta$ ;
- 3) Πότε η  $x$  είναι στοχαστική ανέλιξη και πότε είναι martingale;
- 4) Αν υποθέσουμε ότι έχουμε  $L$  χρηματοοικονομικά συμβόλαια με αποδόσεις  $V^1, V^2, \dots, V^L$  και  $z$  είναι η επενδυτική στρατηγική (χαρτοφυλάκιο) να γραφεί ο τύπος της απόδοσης  $Y_t^z$  της επένδυσης  $z$  τη χρονική στιγμή  $t$  και ο τύπος της απόδοσης  $X_t$  τη χρονική στιγμή  $t$  της μοναδιαίας επένδυσης. Να γραφεί ο τύπος τιμολόγησης των συμβολαίων. Να εξηγήσετε τα σύμβολα που θα χρησιμοποιήσετε.

**Θέμα 3.** Αν στη στοχαστική οικονομία του προηγούμενου θέματος,  $\Delta_t = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ , και  $F_t$  η άλγεβρα που παράγεται από τη  $\Delta_t$ , ποιό είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς την  $F_t$ ? Αποδείξτε την απάντησή σας.

**Άσκηση 4.** Εστω μετοχή εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο σε διάστημα τεσσάρων χρονικών περιόδων 0, 1, 2, 3 με αρχική τιμή  $S_0 = 50$ , συντελεστή ανόδου  $a = 1.2$ , συντελεστή καθόδου  $b = 0.9$ . Εστω δικαίωμα αγοράς  $W$  Ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στη μετοχή τη χρονική στιγμή 0 με τιμή εξάσκησης  $k = 42$  και ημερομηνία λήξης  $T = 3$ . Να προσδιοριστεί το  $W$  και στη συνέχεια προσδιορίστε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του  $W$ . Το σταθερό επιτόκιο μεταξύ δυο χρονικών περιόδων είναι  $r = 0.04$ .

**Άσκηση 5.** Εστω στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , σύνολο χρονικών περιόδων  $T = \{0, 1, 2, 3\}$  και διαμέριση πληροφορίας  $\Delta_0 = \{S\}$ ,  $\Delta_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$ ,  $\Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ ,  $\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ , διάνυσμα πιθανοτητας  $p = (\frac{3}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13})$  και έστω το τα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο  $V = (0, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 0, 3, 2, 1, 6)$  (ως

προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης). Να γραφεί και στη συνέχεια να τιμολογηθεί το forward-start δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο χρηματοϊκονομικό συμβόλαιο V τη χρονική στιγμή 0, με ημερομηνία λήξης τη χρονική στιγμή 3, τιμή εξάσκησης  $k = 1$ , ως πρός τη χρονική περίοδο 2.

**Άσκηση 6.** Περιγράψτε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (*futures*). Πότε λέμε ότι επενδυτής υιοθετεί την αισιόδοξη θέση (*long position*) και πότε την απαισιόδοξη θέση (*short position*):

Εστω ότι επενδυτής επενδύει σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης 1000 τραπεζικών μετοχών διάρκειας τριών μηνών και υιοθετεί τη *short position*. Η τιμή της μετοχής την ημερομηνία εγγραφής του συμβολαίου είναι 20 ευρώ, το αρχικό περιθώριο ασφάλισης (*initial margin*) είναι 20%.

Αν κατά το πρώτο επτάμερο η τιμή της μετοχής εξελίσσεται όπως στο παρακάτω πίνακα, συμληρώστε τον πίνακα ώστε να φαίνεται η εξέλιξη του περιθωρίου ασφάλισης και οι πιθανές ενέργειες του επενδυτή και σημειώστε ποιές από αυτές είναι υποχρεωτικές. Αν η αμοιβή του χρηματιστηριακού πράκτορα είναι 150 ευρώ, ποιο είναι το κέρδος ή η ζημιά του επενδυτή στο τέλος των επτά ημερών;

ημέρα	τιμή μετοχής	κέρδος μετοχής	συνολικό κέρδος	ύψος εγγύησης	ενέργεια
0	20	-	-	-	-
1	21	-	-	-	-
2	23	-	-	-	-
3	20	-	-	-	-
4	20	-	-	-	-
5	19.5	-	-	-	-
6	18.5	-	-	-	-
7	17.5	-	-	-	-