

Όνοματεπώνυμο

Θ E M A T A

~~Θ1.~~ Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος.

(i) Να ορίσετε την έννοια του εσωτερικού γινομένου $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ στον μιγαδικό χώρο V .

(ii) Να δείξετε ότι:

$$(α) (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(β) (x, z) = (y, z) \text{ για κάθε } z \in V, \text{ τότε } x = y.$$

(γ) η νόρμα, που ορίζεται από εσωτερικό γινόμενο, ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

(iii) Αν S είναι ένα ορθοχανονικό υποσύνολο του V , δείξτε ότι $\|s_1 - s_2\| = \sqrt{2}$ για κάθε $s_1, s_2 \in S$.

~~Θ2.~~ (α) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\{e_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ μια ορθοχανονική ακολουθία του H . Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $\{e_i\}$ είναι ορθοχανονική βάση του H .

(ii) Αν $(h, e_i) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$ τότε $h = 0$.

(β) Σ' ένα χώρο Hilbert H να δείξετε ότι ισχύουν:

$$(i) \|y\| \leq \|\lambda x + y\| \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow x \perp y.$$

(ii) Για δυο κλειστούς υποχώρους M, N του H :

$$(α) (M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp. \quad (β) (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}.$$

~~Θ3.~~ (α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ μια γραμμική απεικόνιση.

(β) Πότε λέμε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής; Εξαρτάται η νόρμα του T από τις νόρμες των χώρων X, Y ; Αιτιολογείστε.

~~Θ4.~~ (α) Να δείξετε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής αν, και μόνο αν, υπάρχει $0 < M < \infty$ τέτοιος ώστε $\|Tx\| \leq M \|x\|$, για κάθε $x \in X$.

(β) Έστω H ένας χώρος Hilbert. Να ορίσετε πότε ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται:

(i) φυσιολογικός. (ii) ισομετρία. (iii) θετικός.

Να δείξετε ότι:

(α) Αν A φυσιολογικός, τότε είναι $\|Ax\| = \|A^*x\|$ για κάθε $x \in H$, και να συμπεράνετε ότι για $x \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι $Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^*x = \bar{\lambda}x$.

(β) Αν $S, T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τέτοιοι ώστε $0 \leq S \leq T$, τότε είναι $A^*SA \leq A^*TA$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$, και $\|S\| \leq \|T\|$.

~~Θ5.~~ (α) Έστω $H = L^2(0, 1)$ και ο γραμμικός τελεστής $Af(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$, $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι

$$(i) \left| \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right|^2 \leq \int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{(x-t)}} dt \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} dt.$$

$$(ii) |Af(x)|^2 \leq 2 \int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{(x-t)}} dt.$$

$$(iii) \|A\| \leq 2.$$

~~Θ6.~~ Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Πότε ο A λέγεται συμπαγής;

(α) Να δείξετε ότι αν A, B είναι συμπαγείς τελεστές τότε και οι AB, BA είναι συμπαγείς τελεστές.

(β) Να χαρακτηρίσετε αν είναι αληθής ή φευδής η πρόταση: Αν ο AB είναι συμπαγής τελεστής τότε ένας τουλάχιστον από τους A, B είναι συμπαγής. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(γ) Ποιο είναι το φάσμα $\sigma(A)$ ενός συμπαγούς τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$? Να δείξετε ότι αν ο A είναι συμπαγής και αυτοσυγγής τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.