

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ, 2008

ZHTHMA 1. Διατυπώστε το αξίωμα της αντικατάστασης και την αρχή του διαχωρισμού. Χρησιμοποιήστε το αξίωμα της αντικατάστασης για να αποδείξετε την αρχή του διαχωρισμού.

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα αξιώματα της συνολοθεωρίας, ότι το χαρτεσιανό γινόμενο $A \times B$, δύο συνόλων A και B , είναι και αυτό σύνολο.

ZHTHMA 2. Έστω Δ ένα σύνολο ανοιχτών διαστημάτων του \mathbb{R} (δηλ. αν $A \in \Delta$ τότε για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$) τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι $\overline{\Delta} \leq \aleph_0$.

Ορίστε τι είναι μια συνάρτηση επιλογής ενός συνόλου μη-κενών συνόλων. Αποδείξτε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το αξίωμα της επιλογής, ότι υπάρχει συνάρτηση επιλογής για το Δ .

ZHTHMA 3. Έστω A και B σύνολα. Θεωρήστε το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{g \mid g \text{ είναι συνάρτηση με } \text{dom}(g) \subseteq A \text{ και } \text{Range}(g) \subseteq B \text{ και } g \text{ είναι 1-1}\}$$

Αποδείξτε ότι το διατεταγμένο σύνολο (\mathcal{C}, \subseteq) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του λήμματος του Zorn. Συμπεράνατε ότι υπάρχει στο σύνολο αυτό ένα μεγιστικό στοιχείο. Εξηγήστε πώς στη συνέχεια αποδεικνύεται με βάση τα παραπάνω τη αρχή της συγκρισιμότητας των πληθαρίθμων.

ZHTHMA 4. Ορίστε τις έννοιες οριακός διαταχτικός και αρχικός διαταχτικός ή πληθάριθμος.

Ο ω είναι οριακός διαταχτικός; Είναι αρχικός διαταχτικός ή πληθάριθμος και γιατί;

Έστω α άπειρος πληθάριθμος, δηλ. $\omega \leq \alpha$. Υποθέστε ότι α είναι επόμενος διαταχτικός (έστω $\alpha = \beta'$). Αποδείξτε βασιζόμενοι στο $\omega \leq \beta'$ ότι α δεν είναι πληθάριθμος. Όθεν συμπεράνατε ότι οι άπειροι πληθάριθμοι είναι οριακοί διαταχτικοί.

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.45 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!