

Θέμα 1.

- (α) Δώστε τον ορισμό της τοπολογίας επί ενός συνόλου X .
 (ii) Έστω X άπειρο σύνολο και

$$T = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$$

Δείξτε ότι η T είναι τοπολογία επί του X . Αν $A \subseteq X$ βρείτε τα $\overset{\circ}{A}$ και \overline{A} ως προς την T . (Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις: (a) A πεπερασμένο, (b) A άπειρο και $X \setminus A$ πεπερασμένο και (c) A άπειρο και $X \setminus A$ άπειρο.)

- (X) Πότε μια οικογένεια \mathcal{B} από υποσύνολα ενός συνόλου X είναι βάση για μια τοπολογία επί του X ; Έστω η εξής οικογένεια των ημιανοικτών διαστημάτων του \mathbb{R} ,

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

- (X) Δείξτε ότι η \mathcal{B} είναι βάση για μια τοπολογία T επί του \mathbb{R} .
 (X) Δείξτε ότι η T περιέχει την συνήθη τοπολογία του \mathbb{R} .

- (X) Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$ και $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

Θέμα 2.

- (X) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ αριθμήσιμο. Δείξτε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι συνεκτικό.
 (β) Δείξτε ότι οι χώροι \mathbb{R} και \mathbb{R}^2 δεν είναι ομοιομορφικοί.
 (X) Έστω \mathcal{D} το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλα τα $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες
 (i) το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο.
 (ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $x_n \in \mathbb{Q}$.
 Δείξτε ότι το \mathcal{D} είναι αριθμήσιμο πυκνό στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Θέμα 3.

- (α) Έστω X Hausdorff T_3 χώρος.
 (X) Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και $x \in U$. Δείξτε ότι υπάρχει $V \subseteq X$ ανοικτό ώστε $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.
 (ii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο X έχει αριθμήσιμη βάση. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ .
 (β) Έστω X Hausdorff, T_3 και με αριθμήσιμη βάση.
 (i) Δείξτε ότι ο X είναι T_4 .
 (ii) Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \rightarrow [0, 1]$ συνεχής ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in U$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \notin U$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το α(ii), δηλαδή ότι το U είναι F_σ .)

Θέμα 4.

Έστω X Hausdorff τοπολογικός χώρος.

$F_\sigma = \text{αριθμ. ένωση ανοικτών}$

χ_f

$\rightarrow \forall x \in U, A \dots$

~~(*)~~ Έστω $K \subseteq X$ συμπαγές και $x \in X \setminus K$. Δείξτε ότι υπάρχουν $U_x, V_x \subseteq X$ ανοιχτά και ξένα ώστε $K \subseteq U_x$ και $x \in V_x$.

~~(*)~~ Έστω K_1, K_2 ξένα συμπαγή υποσύνολα του X . Δείξτε ότι υπάρχουν $U_1, U_2 \subseteq X$ ανοιχτά και ξένα ώστε $K_1 \subseteq U_1$ και $K_2 \subseteq U_2$.

~~(ii)~~ Αν ο X συμπαγής, τότε δείξτε ότι ο X είναι T_4 .

~~(*)~~ Έστω X Hausdorff συμπαγής. Δείξτε ότι αν υπάρχει ακολουθία $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, \dots$ συνεχών συναρτήσεων που διαχωρίζει τα σημεία του X , τότε ο X είναι μετριοποιήσιμος.

~~(*)~~ Έστω X Hausdorff συμπαγής και αριθμήσιμος. Δείξτε ότι ο X είναι μετριοποιήσιμος.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!