

Οικονομικά Μαθηματικά

2 Θέματα

2 Ασκήσεις

2 Φεβρουαρίου 2010

~~Θέμα 1.~~ Έστω X, Y μετρικοί χώροι και έστω η απεικόνιση $\phi : X \rightarrow Y$.

(i) Αν $A \subseteq Y$, δώστε τον ορισμό της άνω αντίστροφης εικόνας $\phi^u(A)$ και της κάτω αντίστροφης εικόνας $\phi^l(A)$ και δείξτε ότι

$$(\phi^u(A))^c = \phi^l(A^c).$$

Πότε λέμε ότι η ϕ είναι *upper hemicontinuous* και πότε ότι είναι *lower hemicontinuous* στο X ;

(ii) Αν $Y = X$, πότε λέμε ότι η ϕ έχει σταθερό σημείο; Διατυπώστε το θεώρημα σταθερού σημείου του *Kakutani*.

Θέμα 2. Αν X μετρικός χώρος, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άνω ημισυνεχής στο X αν και μόνο αν το σύνολο $f^{-1}([a, +\infty))$ είναι κλειστό, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

~~Θέμα 3.~~ Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, και \succeq λογική σχέση προτίμησης στο X . Αν η σχέση προτίμησης \succeq είναι άνω ημισυνεχής, τότε η \succeq παίρνει μέγιστη τιμή στο X , σε ένα τουλάχιστον σημείο του X . Τα στοιχεία στα οποία μεγιστοποιείται η \succeq ανήκουν στο ίδιο σύνολο αδιαφορίας της \succeq .

~~Άσκηση 4.~~ Έστω \succeq η λεξικογραφική σχέση προτίμησης στον \mathbb{R}^2 . Δείξτε ότι η \succeq δεν είναι συνεχής και ότι δεν αναπαρίσταται από συνάρτηση χρησιμότητας. (Δώστε τους αντίστοιχους ορισμούς.)

~~Άσκηση 5.~~ Να δώσετε τον ορισμό της ισορροπίας κατά *Walras* που στηρίζεται από το διάνυσμα p . Στη συνέχεια εξετάστε αν σε οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές με αρχικό αγαθό $\omega_1 = (6, 2), \omega_2 = (6, 6)$ και συναρτήσεις χρησιμότητας $u_1(x, y) = xy, u_2(x, y) = x^2y$ η κατανομή

$$x = ((4, 4), (8, 4)),$$

είναι ισορροπία κατά *Walras* που στηρίζεται από το διάνυσμα $p = (1, 1)$.

Άσκηση 6. Έστω ο γραμμικός χώρος $E = C[0, 1]$ εφοδιασμένος με τη σημειακή διάταξη.

(i) Δείξτε ότι ο E είναι γραμμικός σύνδεσμος. Αν $x(t) = t - \frac{1}{2}, t \in [0, 1]$ προσδιορίστε το x^+, x^- και $|x|$.

(ii) Εξετάστε αν η συνάρτηση $\mathbf{1}(t) = 1$ είναι διατακτική μονάδα του E .

Να δώσετε τους αντίστοιχους ορισμούς.