

ΦΡΥΝΝΑ ΔΙΟ 1°

ΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM - LIOUVILLE.

Ασυνέτας από το βιβλίο W. BOYCE & R. DI PRIMA

Σελίδα 632 / 19, 20, 22

Σελίδα 648 / 15, 16

Σελίδα 649 / 24, 27.

$$\text{Av } f(x+2\pi) = f(x) \text{ με } f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 4, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

σε ποιες αριθμητικές τιμές δαι συγχίνει
η σειρά Fourier της f στα σημεία $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}$;

Διέταν ότι η περιοδική συάρτωση $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$
αναπτύσσεται σε δυνητικούς σειρά Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx. \text{ Χρησιμοποιώντας αυτήν}$$

την αναπτύξουμε, να δείξετε ότι

$$(a) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(b) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$(c) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{χρησιμοποιώντας τα } (a), (b)).$$

Η περιττή περιοδική συάρτωση $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$,
αναπτύσσεται σε μηζονική σειρά Fourier?

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx. \text{ Χρησιμοποιώντας αυτήν την}$$

αναπτύξουμε την συμμέτρωση όρο προς όρο, να βρεθεί
η μηζονική σειρά Fourier για την περιοδική συάρτωση $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$.

Να αναπτύξετε σε γενικωμένες σειρές Fourier της
συστήσεως f ως προς το γενικό σύστημα πλούσιων
των προβλημάτων Sturm - Liouville:

$$(a) f(x) = 1, 0 < x < 1 : \{ y'' + \lambda y = 0, y(0) = y'(1) = 0 \}$$

$$(b) f(x) = x + x, -\pi < x < \pi : \{ y'' + \lambda y = 0, y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi) \}$$

$$(c) f(x) = 1, 0 < x < 1 : \{ y'' - 3y' + 2\lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0 \}$$

$$(d) f(x) = \ln x, 1 < x < e : \{ x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, y(1) = y(e) = 0 \}$$

(Ανανεώστε στη σίων σελίδα)

Answerees

⑩ 2. $y_2, 5/2, 2, 1/2, 1$

⑪ 4. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

⑫ 5. (a) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi x}{(2n-1)}$

(b) $f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$

(c) $f(x) = 2\pi e^{3x/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2\pi^2 + \frac{9}{4}} \right) [1 + (-1)^{n-1} e^{-\frac{3}{2}}] \sin n\pi x$

(d) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\pi \ln x)$

⑬ 1. (632)

(19 β) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x/2]}{2n-1}$

(20 β) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$

(22 β) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi^2} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$

(648-649)

(15) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$

(16) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(-\cos n\pi + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$

(24 a) $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$

(27 β) $g(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{3}$

$h(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}$

