

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/2<sup>ο</sup> Εξάμηνο

$- \int^3 + 3 \int^2 - 13(6^2 - a^2) + 76^2 - 36^2 a^2$

22-6-2010

$A = P B P^{-1}$

ΘΕΜΑ 1

(α) Αν οι  $\nu \times \nu$  πίνακες A, B είναι όμοιοι, να αποδείξετε ότι έχουν τις ίδιες ακριβώς διοτιμές.

Mονάδες 1

(β) Η γραμμική απεικόνιση  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  απεικονίζει κάθε σημείο  $M(x, y)$  του επιπέδου στην ορθή προβολή του πάνω στην ευθεία  $\varepsilon: r = tu, t \in \mathbb{R}$  όπου

$u = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . Βρείτε τον πίνακα της T, ως προς την κανονική βάση του  $\mathbb{R}^2$ .

$x^T A > 70$

$y^T P$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

Mονάδες 1,5

$$= [ax + by, bx + ay + bz, by - bz] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$= ux^2 + 6xy + 6yz + 6x^2 + 6y^2 + 6z^2$$

$t.u > 1$

$\xi = 80\%$

Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα M και ορθογώνιο πίνακα P, ώστε:  $M^{-1}AM = P^{-1}AP = D$ , όπου D διαγώνιος πίνακας.

Επιπλέον, να διατυπώσετε συνθήκες ικανές και αναγκαίες, ώστε ο πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος.

$$u(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz + 2yz$$

Mονάδες 3,5

ΘΕΜΑ 3

Για κάθε  $\mu \times \nu$  πίνακα A, να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $A^T A$  είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Να αποδείξετε και την ισότητα  $\ker A = \ker(A^T A)$ , όπου για έναν πίνακα P συμβολίζουμε  $\ker P = \{x : Px = 0\}$ .

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i,j} x_i x_j \\ \vdots \\ \sum_{i,j} x_i x_j \end{pmatrix} \quad \text{Movádes 2}$$

ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} 1 & \kappa & 1 \\ 0 & 1 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$(a-1)^{-1} \quad -\kappa t = -(1+\kappa)^{-1}$$

Movádes 2

(α) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και την αντίστοιχη κανονική μορφή Jordan αυτού για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Movádes 1

(β) Για  $\kappa = -1$ , να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P, έτσι ώστε  $P^{-1}AP = J_A$ , όπου  $J_A$  η κανονική μορφή Jordan του πίνακα A.

Movádes 1

(γ) Για  $\kappa = 0$  να εκφράσετε τον πίνακα  $A^n$  ως πολυώνυμο του πίνακα A βαθμού το πολύ 1.

Movádes 1

$$\left( \frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} (x_1, x_2)$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

(a-1) (a-1)

-6 (b/a)

-16 (b/a)

Kαλή επίτυχia

AT