

ΤΤΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1) Εστω $X = \text{απειροδιαστάτος χώρος Banach}$ και $A \in L_c(X)$. Δείξτε ότι
υπάρχει $y \in X$ τ.ω. \exists $x \in X$ τ.ω. $A(x)=y$ δέν έχει λύση.
- 2) Εστω $X = B$ -χώρος. Δείξτε ότι $K \subseteq X$ έναι σχετικά συμπλήρωμα avv \forall $\epsilon > 0$
υπάρχει $K_\epsilon \subseteq X$ σχετικά συμπλήρωμα τ.ω. $K \subseteq \epsilon \overline{B}_1 + K_\epsilon$.
- 3) \forall $X = \text{απειροδιαστάτος } B\text{-χώρος}$, δείξτε ότι X_w είναι Baire-1
κατηγορία.
- 4) Εστω X, Y B -χώροι και $A \in L(X, Y)$. Δείξτε ότι A είναι 1-1 avv $A^*(Y^*)$
 $\subseteq X^*$ είναι w^* -πυκνό.
- 5) Εστω X, Y B -χώροι. Δείξτε ότι $X = \text{Reflexive}$ avv $\forall A \in L_c(X, Y)$
υπάρχει $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ τ.ω. $\|A\|_F = \|A(x)\|$.
- 6) Εστω $X = \text{yn-Reflexive}$ και $Y = \text{Reflexive } B\text{-χώροι}$. Δινεται $A \in L(X, Y)$
1-1. Δείξτε ότι $A(X)$ δέν είναι κλειστό στο Y .
- 7) Εστω X, Y B -χώροι και $A \in L(X, Y)$ είναι γ πι. Δείξτε ότι υπάρχει
 $M > 0$ τ.ω. δοθέντος $y \in Y$, υπάρχει $x \in X$, $\|x\| \leq M \|y\|$ που ικανο-
ποιει $A(x) = y$.
- 8) Γνωρίζουμε ότι $X = \text{απειροδιαστάτος χώρος Banach}$, τότε ο $\overline{\partial B}_1^w$.
Χρησιμοποιήστε το για να δείξετε ότι δεν είναι μετρικοποιησίμος
- 9) Εστω $X = B$ -χώρος, $y^* \in X^*$, $\|y^*\| = 1$ και $x \in X$. Δείξτε ότι $d(x, M) = |k y^* x|$
όπου $M = k \ker y^*$.
- 10) Εστω X ~~non Banach~~^{Banach}-χώρος και $A \in L_c(X)$. Δείξτε ότι
" $x \xrightarrow{w} x$ στο $X \Rightarrow A(x) \xrightarrow{w} A(x)$ στο X' "

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Πρόβλημα 1:

- (a) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτά φραγμένα, $L \in \mathcal{L}(L^1(\Omega_1), L^1(\Omega_2))$ και $E \subseteq L^1(\Omega_1)$ δικοιονορφα διλοκληρωσινο συνολο. Δείξτε ότι $L(E) \subseteq L^1(\Omega_2)$ είναι δικοιονορφα διλοκληρωσινο.
- (b) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό φραγμένο και $E \subseteq L^1(\Omega)$ είναι σχετικα w -δικοιονορφα. Θέτουμε $C = \{u \in L^1(\Omega) : |u(z)| \leq |y(z)| \text{ a.e στο } \Omega \text{ για κάποιο } y \in E\}$. Δείξτε ότι $C = \text{σχετικα } w\text{-δικοιονορφα}$.

Πρόβλημα 2:

- (a) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό φραγμένο και $\{u_n, u\}_{n \geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$). Υποθέτουμε ότι $u_n(x) \rightarrow u(x)$ a.e στο Ω , $\|u_n\|_p \rightarrow \|u\|_p$. Δείξτε ότι $u_n \rightarrow u$ στο $L^p(\Omega)$.
- (b) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μετρούμενη συνάρτηση τ.ω $f \in L^1(\Omega)$ για καθε $g \in L^q(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Δείξτε ότι $f \in L^p(\Omega)$.

Πρόβλημα 3:

- (a) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό $1 < p < \infty$, $\{u_n\}_{n \geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$, $u_n \xrightarrow{w} u$ και $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_p \leq \|u\|_p$. Δείξτε ότι $u_n \rightarrow u$ στο $L^p(\Omega)$.
- (b) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, $f \in L^1(\Omega)$ και $\int_A f(x) dx \leq a \quad \forall A \in \mathcal{B}(\Omega), |A|_N < \infty$. Δείξτε ότι $\int_{\Omega} f(x) dx \leq a$.

Πρόβλημα 4:

Θέτουμε $C = \{u \in L^1[0,1] : u(x) \geq 1 \text{ a.e}\}$. Είναι το C w -κλειστο? Δικαιολογήστε.

Πρόβλημα 5

- ?Εστω $f_n(\cdot) = \chi_{[\frac{n}{n+1}, 1]}$. Είναι $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ δικοιονορφα διλοκληρωσινο?
- Δικαιολογήστε.

Πρόβλημα 6.

Ένσυνθέτουμε όπως $f \in L^p[0,1]$ για κάποιο $p > 1$. Δείξτε όπως $\lim_{p \rightarrow 1} \|f\|_p = \|f\|_1$.

Πρόβλημα 7

Άνταξε $1 \leq p < q < r \leq \infty$, τότε δείξτε όπως $L^q[0,1] \subseteq L^p[0,1] + L^r[0,1]$

Πρόβλημα 8.

Άνταξε $1 \leq p < q < r \leq \infty$, δείξτε όπως $L^p[0,1] \cap L^r[0,1] \subseteq L^q[0,1]$ και ο έγκλεισμός είναι συνεχής (στο $L^p \cap L^r$ θεωρούμε την norm $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$).

Πρόβλημα 9:

Έστω $C \subseteq L^p[0,1]$ ($1 < p < \infty$) φραγμένο. Δείξτε όπως C είναι διοικητρικό

διλογική πρωτοσίνο.

Πρόβλημα 10.

Έστω $1 < p < \infty$, $f \in L^p(0, \infty)$ και $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds$. Δείξτε όπως

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$