

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

12/02/2010

Θέμα 1 (3 βαθμοί): (α) Για την άμεση μέθοδο του Euler, $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ να ορίσετε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίσης (truncation error) T_n και να αποδείξετε ότι $|T_n| \leq T = \frac{1}{2} h \max_{0 \leq x \leq b} |y''(x)|, n=0, \dots, N-1$. Υποθέστε ότι η λύση y είναι ομαλή. (Τύλα)

(β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών στο $[0,1]$:

$$y' = \frac{1}{5}y + (1 - \frac{6}{5}x)e^{-x}$$

$$y(0) = 0$$

Ο τύπος του σφάλματος για την άμεση μέθοδο του Euler είναι:

$$|e_n| \leq \frac{T}{L} \left(e^{L(x_n - x_0)} - 1 \right), n=0, \dots, N, \text{ όπου } L \text{ είναι η σταθερά Lipschitz της } f \text{ ως προς } y.$$

Να υπολογιστεί το βήμα h για είναι το σφάλμα στο $x_N=1$ να είναι μικρότερο από 10^{-4} . Δίνεται $y(x) = xe^{-x}$. Το βήμα είναι ομοιόμορφο.

(γ) Για το πρόβλημα του ερωτήματος (β) να ορίσετε την πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδο του Euler στο διάστημα $[0, 1]$ με βήμα $h=1/N$ και να υπολογίσετε μια προσέγγιση του $y(1)$ χρησιμοποιώντας 2 υποδιαστήματα.

Θέμα 2 (3 βαθμοί): (α) Να εξετάσετε τις ακόλουθες πολυβηματικές μεθόδους ως προς τη μηδενική ευστάθεια:

$$(1) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

$$(2) \quad y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 2h(f_{n+2} + f_{n+1})$$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$.

(β) Μπορείτε να κατασκευάσετε μία 4-βηματική μέθοδο με τάξη ακρίβειας 7; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Θέμα 3 (2.5 βαθμοί): (γ) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου a , ώστε η μέθοδος

$$-2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-4x}$$

$$y_{n+1} - ay_n = \frac{h}{2} (f_{n+1} + af_n)$$

η

εξ

να είναι συγκλίνουσα.

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$. Μπορείται να θεωρήσετε τη συνάρτηση $f(x, y)$ Lipschitz και τη αρχική συνθήκη κατάλληλα επιλεγμένη.

(β) Για τιμή της παραμέτρου $\alpha = 1$, να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου του τραπεζίου για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(x) = y^2, y(0) = 1$$

για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής τιμής στο 0.2. Για την επίλυση της μη-

γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιείστε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson: $(x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, x_0 \text{ γνωστό})$.

~~Θέμα 4 (1,5 βαθμοί):~~ (α) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dx} \left(e^x \frac{d}{dx} u(x) \right) + e^x u(x) = 1+x \\ & u(0) = 0, u(1) = e^{-1} \end{aligned}$$

(β) Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (με κατάλληλες υποθέσεις για τα δεδομένα $p(x), r(x), f(x)$)

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + r(x) u(x) = f(x) \\ & u(a) = A, u(b) = B \end{aligned}$$

η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τιμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη) ικανοποιεί την εκτίμηση σφάλματος:

$$\|u - u^h\|_A \leq \frac{h}{\pi} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} p(x) + \frac{h^2}{\pi^2} \max_{a \leq x \leq b} r(x) \right\}^{1/2} \|u''(x)\|_{L^2(a,b)}$$

$$\text{όπου } \|f\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$$\begin{aligned} & -2xe^{-x} + x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} \\ & - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε το βήμα h (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση $\|u - u^h\|_A \leq 10^{-2}$ για το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Δίνεται $u(x) = xe^{-x}$.