

Θέμα 1. (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

(β) Πόσες ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού $n > 0$ στο \mathbb{C} ;

Θέμα 2. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \frac{e^{-z} \sin z}{z^3} dz$$

όπου C ο κύκλος $|z - 1| = 3$.

(β) Θεωρούμε τον κύκλο $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ και τη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus C \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \int_C \frac{e^{\frac{z}{3}\zeta}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Να υπολογιστούν οι τιμές:

(i) $f(i)$

(ii) $f(-i)$

(iii) $f(z)$ για $|z| > 2$.

Θέμα 3. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ολόμορφη και μη σταθερή στο φραγμένο πεδίο D και συνεχής στο \bar{D} . Αν $f(z) = k = \text{σταθ.}$ στο σύνορο ∂D του D , τότε δείξτε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο D .

Θέμα 4. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}.$$

Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα όταν το z είναι πραγματική μεταβλητή, αλλά αποκλίνει για $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Θέμα 5. (α) Έστω $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ μια ολόμορφη συνάρτηση με $u_x, v_y \neq 0$ παντού. Οι εξισώσεις

$$u(x, y) = c \quad \text{και} \quad v(x, y) = k, \quad c, k \text{ σταθερές,}$$

ορίζουν δυο οικογένειες καμπύλων στο μιγαδικό επίπεδο. Δείξτε ότι οι δυο οικογένειες τέμνονται ορθογώνια.

(β) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας καμπύλων

$$2e^{-x} \sin y + (x^2 - y^2) = c, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Η εξέταση διαρκεί 2:50' ώρες.
Καλή επιτυχία.