

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Φυσικού
ΑΘΗΝΑ 27/2/2008, ΩΡΑ:8.30

Θέμα 1^ο:

- (α) (Mov. 0.25). Να προσδιορίσετε τον τόπο της διαφορικής εξίσωσης:
 $x_1^2 u_{x_1 x_1} - e^{x_2} u_{x_2 x_2} - u_{x_1} + 2u_{x_2} = 1, \quad u = u(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$
- (β) (Mov. 0.25). Να δοθεί η γενική μορφή της σχεδόν γραμμικής διαφορικής εξίσωσης α' τάξης για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
- (γ) (Mov. 0.75). Να βρεθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών:
 $\Delta u(x, y) = 9x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$
 $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 2) = 0.$
 Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

– **Θέμα 2^ο:**

- (α) (Mov. 2.5). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=a} = 5 \cos \varphi, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=b} = \sin 2\varphi, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi$$

- (β) (Mov. 2), Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty),$$

$$\frac{\partial u(x_1, 0)}{\partial \eta} = f(x_1), \quad x_1 \in (-\infty, +\infty)$$

όπου η είναι το εξωτερικά κατευθυνόμενο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο και f γνωστή συνεχής συνάρτηση. Να δοθεί η λύση του προβλήματος σε ολοκληρωτική μορφή.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον

$$\mathbb{R}^2 : E(x; x') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$$

Θέμα 3^ο:

- (α) (Mov. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0, \quad (a > 0)$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0, & a/2 < x \leq a \end{cases}$$

- (β) (Mov. 1). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 2, \quad y(0) = y'(2) = 0.$$

- (γ) (Mov. 1.75). Με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού, να βρεθεί η λύση του προβλήματος:

$$u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u, u_x \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow +\infty$$

(Η λύση να δοθεί υπό ολοκληρωτική μορφή).

Δίνεται ο μετασχηματισμός Fourier

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx = \hat{f}(s),$$

$$F^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{-isx} ds = f(x),$$

$$F\{f''(x)\} = (-is)^2 \hat{f}(s),$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ